



Marcus Berg, 2008-11-10

Kvantfysikens principer, FK2003

Extramaterial 3: Snärjelse

Det står inget om snärjelse i Feynman, så de här fyra sidorna utgör kurslitteratur för den här biten av kursen. Allting här kan läsas översiktligt; ni förväntas inte kunna förstå detaljer av en så här kortfattad beskrivning. Poängen är bara att ni skall ha någon aning om vad snärjelse handlar om. För dem som är intresserade ger jag tips om vidareläsning.

När vi pratade om "blixten" från fotoner i dubbelspaltexperiment stötte vi på amplituden

$$\begin{aligned} & \langle \text{elektron i hål 1, foton i } D_1 \mid \text{elektron från källa } s, \text{ foton från ljuskälla } L \rangle \\ & = \langle x, D_1 \mid s, L \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

Här använde vi alltså *komman* för att prata om ett "totalt" tillstånd, dvs. ett tillstånd som beskriver både fotonen och elektronen. Låt oss studera närmare vad det betyder. Om vi försöker abstrahera t.ex. högra delen (*ket*-delen) ovan, $|s, L\rangle$, till någon allmän notation som inte beror på just den här elektronkällan s och den här ljuskällan L , kan vi karaktärisera den som:

$$| \text{elektronens tillstånd} , \text{ fotonens tillstånd} \rangle . \quad (2)$$

Det här sättet att skriva på lämnar öppen möjligheten att fotonens tillstånd på något sätt *hänger ihop* med elektronens tillstånd. Å andra sidan, i spridningsexperimentet betraktade vi partiklarna som *oberoende*, dvs. "partikel a hamnade i detektor 1 och partikel b hamnade i detektor 2" skrev vi så här

$$\langle 1 \mid a \rangle \langle 2 \mid b \rangle , \quad (3)$$

så *ket*-delen skulle vi kunna ha skrivit¹

$$|a\rangle |b\rangle . \quad (4)$$

Är det någon skillnad på det och "komma-notation" mer i stil med (2), alltså

$$|a, b\rangle \quad ? \quad (5)$$

Svaret är att det *bara* gäller för *oberoende* händelser att amplituderna multipliceras så enkelt som i (3).² I allmänhet kan partikel a :s tillstånd bero på partikel b :s tillstånd, och då går det inte att skriva som i (3) utan vi får nöja oss med komman som i (5).

¹mer matematiskt korrekt vore $|a\rangle \otimes |b\rangle$. Vi är inte så petiga i den här kursen.

²jämför den analoga utsagan i statistik: bara för oberoende händelser A och B multipliceras sannolikheten att A händer förutsatt att B har hänt: $P(A, B) = P(A)P(B)$. Att sannolikheterna multipliceras följer från vår utsaga om att amplituderna multipliceras, eftersom $|\langle a|1\rangle\langle b|2\rangle|^2 = |\langle a|1\rangle|^2 \cdot |\langle b|2\rangle|^2$. Se även uppgift 4-P2 i kompendiet.

För att ställa det på sin spets tar vi inte en elektron och en foton som i ekvation (2) utan två fotoner. En foton för sig är ett 2-tillståndssystem³, som ammoniakmolekylen som vi har pratat en del om. För två *oberoende* fotoner kan man prata om två olika Hamiltonmatriser $H_{ij}^{(1)}$ och $H_{ij}^{(2)}$, och i princip lösa differentialekvationerna (Feynman ekv. (8.43)) oberoende av varandra, så vi får två exakta kopior av ekvationerna för ammoniakmolekylen, med sina egna stationära tillstånd och så vidare, oberoende av varandra.

Men vad händer om fotonerna *inte* är oberoende? Ett analogt exempel på hur det kan bli så har vi redan gått igenom: neutronspridning från en kristall. Vi noterade att eftersom det *totala* spinnet är bevarat, så betyder ett uppmätt spinnbyte hos neutronen att *någon* atomkärna också måste ha bytt spinn, annars är det totala spinnet inte bevarat. Så om vi istället börjar med ett system *utan* spinn, så kan det bara dela upp sig i två delar om summan av delarnas spinn är noll.

Till exempel, om ena fotonen är ”+” (jfr. fotnoten nedan) och andra är ”−”, då kan de bara ha bildats från ett system med totalt spinn noll. I elementarpartikelfysik kan det t.ex. vara en meson (en instabil partikel) som har spinn noll, som sönderfaller till två fotoner. Eller, i forskningsområdet *kvantoptik* använder man en s.k. ickelinjär kristall som kan producera ett sådant tillstånd, ett s.k. *snärjt* tillstånd (eng. ”entangled state”).

För att bygga upp ett snärjt tillstånd börjar vi med

$$| \text{foton 1 är +, foton 2 är -} \rangle$$

Låt oss komma överens om att alltid skriva foton 1 först, dvs. ovanstående ket kan skrivas kortare som

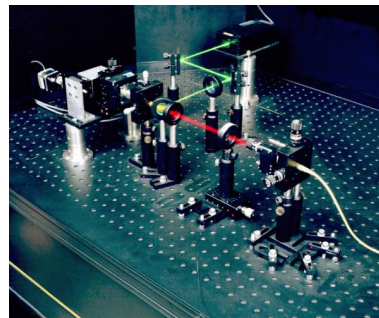
$$|+, -\rangle$$

vilket alltså inte är samma sak som $|-, +\rangle$.

I motsats till spridningsexperiment med identiska bosoner (då vi kunde ha partikel a i detektor 1 och partikel a i detektor 2) finns i det här fallet inget tillstånd $|+, +\rangle$, därför att vi har definierat det totala tillståndet så att totala spinnet är noll. Däremot kan vi föreställa oss ett superpositionstillstånd

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|+, -\rangle + |-, +\rangle) . \quad (7)$$

Det här tillståndet är snärjt eftersom det inte går att skriva som en produkt $|a\rangle|b\rangle$ av två tillstånd $|a\rangle$ och $|b\rangle$.



Kvantoptik-experiment

³Det kan vara förvirrande att fotoner har spinn 1 och vi har sagt att en spinn- s -partikel har $2s + 1$ tillstånd. Men det är ett speciellt undantag för *masslösa* spinn-1-partiklar att de ”förlorar” ett tillstånd jämfört med massiva partiklar. Fotonen är alltså spinn 1 men har bara 2 bastillstånd, t.ex. vänstercirkulär eller högercirkulär polarisation, som vi kan kalla ”spinn upp” och ”spinn ned”, eller ”+” och ”−”, om vi vill, för att anknyta till den tidigare diskussionen om 2-tillståndssystem. Att *bevisa* att masslösa partiklar har färre tillstånd för givet spinn får vänta till en kurs i *relativistisk* kvantmekanik.

Låt oss titta på det i lite mer detalj för att förstå mer om snärjda tillstånd, och ge en mer precis definition av dem. Utveckla $|a\rangle$ och $|b\rangle$ i bastillstånd:

$$|a\rangle = \alpha_1|+\rangle + \alpha_2|-\rangle \quad (8)$$

$$|b\rangle = \beta_1|+\rangle + \beta_2|-\rangle \quad (9)$$

Eftersom man kan omdefiniera tillstånden $|a\rangle$ och $|b\rangle$ genom att multiplicera med en komplex variabel har de här tillstånden $2 - 1 = 1$ fria komplexa variabler var, alltså totalt 2. Produkttillståndet

$$\begin{aligned} |a\rangle|b\rangle &= (\alpha_1|+\rangle + \alpha_2|-\rangle)(\beta_1|+\rangle + \beta_2|-\rangle) \\ &= \alpha_1\beta_1|+, +\rangle + \alpha_1\beta_2|+, -\rangle + \alpha_2\beta_1|-, +\rangle + \alpha_2\beta_2|-, -\rangle \end{aligned} \quad (10)$$

bestäms alltså av 2 fria komplexa variabler. Men ett allmänt tvåfotontillstånd

$$\gamma_1|+, +\rangle + \gamma_2|+, -\rangle + \gamma_3|-, +\rangle + \gamma_4|-, -\rangle \quad (11)$$

har $4 - 1 = 3$ fria komplexa variabler, inte bara 2. Vi ser alltså genom att jämföra (10) och (11) att produkttillståndet $|a\rangle|b\rangle$ är väldigt speciellt. Vi definierar snärjda tillstånd som de som inte går att skriva som produkttillstånd. Det betyder att de *flesta* teoretiskt möjliga tvåfotontillstånden är snärjda!⁴ Det är bara de speciella tillstånd som går att skriva som i (10) som *inte* är snärjda. Att det finns fler snärjda än icke-snärjda tillstånd betyder förstås inte att det är lättare att hantera de snärjda i experiment: snärjda tillstånd har länge varit svåra att kontrollera i praktiken, men i t.ex. kvantoptik blir det mer och mer görbart ju mer tekniken utvecklas.

Nu när du har sett hur snärjda tillstånd är definierade i allmänhet kan du gå tillbaka till tillståndet (7) och försöka se varför det *inte* går att skriva som produkttillståndet (10). (Ledning: försök välja α_1 , β_1 , α_2 och β_2 i (10) så att du får (7)!)

En svår fråga är: vad händer om vi separerar fotonerna 1 och 2 i rummet — tar en till Jukkasjärvi och en till Trelleborg — är de fortfarande snärjda? Alla experiment hittills pekar på att de är det. Det längsta man lyckats transportera dem ifrån varandra i enkelt testbara experiment är några kilometer, och förra året hävdade bl.a. Mohameds f.d. chef Weinfurter i München att de lyckats med 144km! [1]

[1] R. Ursin et al, “Entanglement-based quantum communication over 144 km”, Nature Physics 3 (2007), <http://www.nature.com/nphys/journal/v3/n7/full/nphys629.html>

Det betyder att man *ögonblickligen* kan påverka resultatet av en framtida mätning av foton 1:s tillstånd genom en mätning av foton 2, trots att de är kilometer från varandra. (Det tar i och för sig ljus bara runt $10^3/10^8 = 10^{-5}$ sekunder att ta sig en kilometer, men det är en lång tid i de här experimenten.) Det var det som Einstein kallade ”spukhafte Fernwirkung”.

⁴Mer precist matematiskt kan man säga att produkttillståndet är en hyperyta av komplex dimension 2 i ett rum av komplex dimension 3, så produkttillstånden är “av mått noll”. För att föreställa dig det kan du tänka dig en vanlig reell yta i vanliga reella tre dimensioner: punkterna på ytan är väldigt speciella, och det är *oändligt* många fler punkter i rummet som inte är på ytan än punkter som är på ytan.

Man kan som tur är visa att man därigenom inte kan skicka kvantinformation fortare än ljuset, så speciell relativitetsteori är inte i fara. Däremot finns kreativa ideer i s.k. *kvant-kommunikation* om hur man skall kunna använda det för nya kommunikationsmöjligheter ändå, men det får vänta tills en annan kurs.

Låt mig till sist poängtera att det totala spinnet inte alltid måste vara noll för snärjda tillstånd som i (7), men det är det enklaste fallet. Haken med det enklaste fallet, som det brukar vara med enklaste fall, är att det inte är så representativt: man kan blanda ihop ”kvantkorrelation” och ”klassisk korrelation” i det fallet. Betrakta två bollar som till en början inte snurrar, men studsar in i varandra och börjar snurra i motsatta riktningar. Bollarna har tillsammans bevarat rörelsemängdsmoment, så om man mäter hur den ena snurrar efter kollisionen kan man sluta sig till något om hur den andra snurrar. Det är *klassisk korrelation*, för bollarna är korrelerade oavsett om vi mäter dem eller inte. Men vi har t.ex. sett i Stern-Gerlach-experimentet att mätning av S_x kan göra S_z helt obestämbar. För kvantkorrelationen mellan snärjda tillstånd spelar det roll *i vilken riktning vi mäter spinnet hos den ena* huruvida de är korrelerade. Det är väldigt konstigt, men så är det.⁵

Ni förväntas bara vara medvetna om att det *finns* en skillnad mellan klassisk korrelation och kvantkorrelation i ovanstående mening, inte kunna förstå kvantkorrelation.

1 Vidareläsning

- En av de framtida tillämpningarna av snärjelse kan tänkas vara kvantdatorer och ”teleportering”. Här är två populärvetenskapliga artiklar om det från de senaste månaderna:
[2] New York Times (5/2/2008): ”Quantum Teleporting, Yes; the Rest Is Movie Magic”
[3] Technology Review: ”Toward a Quantum Internet” (15/4 2008),
<http://www.technologyreview.com/Infotech/20565>

Man skall förstås ta artiklar i vanliga pressen med en nypa salt, men de kan vara uppfriskande.

- Sedan finns olika föredrag, t.ex. en timme av Edward Farhi från MIT som pratar på Googles huvudkontor om hur en kvantdator kan spela spel bättre än en klassisk dator:
[4] E. Farhi på Google Tech Talks (2/4/2008): <http://www.youtube.com/watch?v=gKA1k3VJDq8>

- Bland gratismaterial finns sedan djupare föreläsningsanteckningar som Preskills:
[5] <http://theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/>
I kapitel 4 pratar han om Bells experiment. Men för att verkligen förstå det (densitetsmatriser, korrelatorer, ...) måste du läsa en mer avancerad kurs i kvantmekanik!

- För dem som vill ha en riktig bok med snygga bilder finns till sist vår egen Fysikum-bok av Ingemar Bengtsson och Karol Zyczkowski:
[6] I. Bengtsson, K. Zyczkowski, ”Geometry of Quantum States. An Introduction to Quantum Entanglement”, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

⁵För intresserade: i inlämningsuppgift 2 från VT2008 (se länk från kurshemsidan) betraktades ett tidsberoende snärjt tillstånd $|\psi(t'_1, t_0)\rangle$ som innehåller ett bastillstånd $|+, +\rangle$, alltså är totala spinnet inte noll. Se lösningen till uppgiften för en diskussion om kvantkorrelationen.