

Förslag till lösning

Kvantfysikens principer FK2003, 2008-12-18

Marcus Bengt

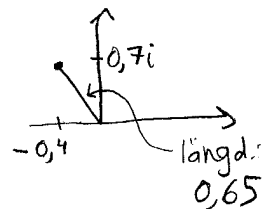
① a) Interferens:

$$P = |\phi_1 + \phi_2|^2 = |0,1 + 0,5i + (-0,5) + 0,2i|^2$$
$$= |-0,4 + 0,7i|^2$$

$$\stackrel{(*)}{=} (-0,4)^2 + (0,7)^2$$

$$= 0,16 + 0,49$$

$$= 0,65 = 65\%$$



i steg (*) använder man

$$\left(\begin{aligned} |a+ib|^2 &= (a+ib)(a+ib)^* = (a+ib)(a-ib) \\ &= a^2 - iab + iba - i^2b^2 = a^2 - i^2b^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned} \right)$$

b) Ingen interferens:

$$P = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$$

$$= |0,1 + 0,5i|^2 + |(-0,5) + 0,2i|^2$$

$$\stackrel{\text{p.s.s.}}{=} (0,1)^2 + (0,5)^2 + (-0,5)^2 + (0,2)^2$$

$$= 0,01 + 0,25 + 0,25 + 0,04$$

$$= 0,55 = 55\%$$

c) Man måste räkna ut Δp_x och Δx vid samma tidpunkt för att använda Heisenbergs oövertändhetsrelation. I det här exemplet vet vi $\Delta p_x \approx 0$ före, men $\Delta p_x \approx p_0 \Delta \theta$ efter elektronen har passerat spalten (jfr. Feynman 2-2). Och när vi mätt partikelns läge på skärmen finns ingen oövertändhet alls (bara experimentell osäkerhet), partikeln är i ett "klassiskt tillstånd".
(Jfr. Feynman sid 2-3)

(2)

a) amplitud = $\langle -S | +T \rangle \langle +T | -S \rangle$
(böja från höger)

vad är $\langle -S | +T \rangle$?

$$\begin{aligned} \text{Ja, } \langle -S | +T \rangle &= \langle -S | \frac{1}{\sqrt{2}} (|+S\rangle + |-S\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -S | +S \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -S | -S \rangle \\ \left(\langle i | j \rangle = \delta_{ij} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

och vi vet att när vi vänder $\langle i | j \rangle$ ist. för $\langle j | i \rangle$ komplexkonjugerar vi, fast det gör ingen skillnad här:

$$\langle +T | -S \rangle = \langle -S | +T \rangle^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^* = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

så amplituden är $\langle -S | +T \rangle \langle +T | -S \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

b)

$$P = |\text{amplitud}|^2$$

$$= \left| \frac{1}{2} \right|^2 = \frac{1}{4}$$

c)

$$\begin{aligned} \text{amplitud} &= \langle +S|+T \rangle \langle +T|-S \rangle \\ &\quad + \langle +S|-T \rangle \langle -T|-S \rangle \\ &\rightarrow = \langle +S|-S \rangle = 0 \end{aligned}$$

ekv. (50) i formelsamlingen

Det kommer ut noll partiklar.
(upp till exp. osäkerhet, se (4))

d) ekvation (1) och (2) innehåller inte bara att $|+T\rangle$ består till hälften av $|+S\rangle$ (i bemärkelsen $|\langle -T|+S \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$) utan också "föres-information" (t.ex. plus eller minus mellan $|+S\rangle$ och $|-S\rangle$?).

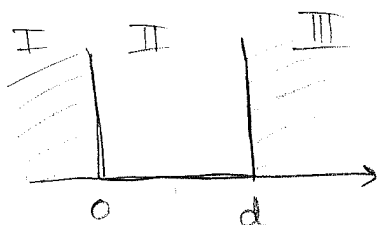
Den föresinformationen möjliggör interferens,

$$\begin{aligned} \text{dvs} \quad &\langle +S|+T \rangle \langle +T|-S \rangle + \langle +S|-T \rangle \langle -T|-S \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Om allt vore klassiska sannolikheter (50% av $+S$ i $+T$, osv.) skulle de inte kunna ta ut varandra (positivt + positivt = positivt) och utsagan vore korrekt.
Den svaga länken är "Då får vi..."

(Jfr. Feynman s. 5-10)

③



(given $d = 1 \text{ nm}$, men
lättare att hålla reda
på enheter än vi behåller " d ")

I, III

Där $V = \infty$ måste $\phi = 0$: $\phi = 0 \quad x \leq 0$
 $\phi = 0 \quad x \geq d$

i synnerhet måste $\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \phi(d) = 0 \end{cases}$ ("rand-villkor")

II)

Där $E > V_0$ ($V_0 = 0$ här) måste
lösningen kröka ar mot x -axeln, dvs. sinus eller
cosinus om $V = \text{konstant}$.

$$\phi(x) = a \sin kx + b \cos kx$$

steppa in $\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \phi(d) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ kd = n \cdot \pi \quad (= \pi, 2\pi, 3\pi, \dots) \end{cases}$

värdet

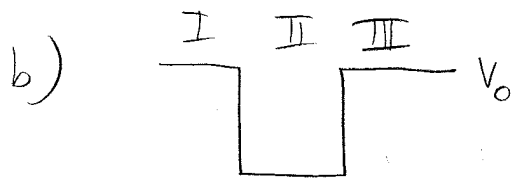
Jfr
föreläsningar
och kompendiet

$$k, d > 0 \\ \Rightarrow n > 0$$

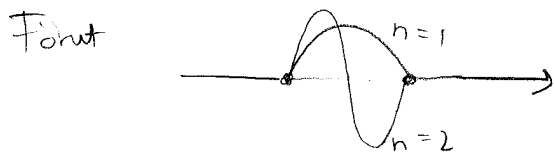
Alltså $k = \frac{n\pi}{d}$ och $p = \hbar k$, så $p = \hbar \frac{n\pi}{d}$

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\left(\hbar \frac{n\pi}{d}\right)^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m d^2} = \left(\frac{1,05 \cdot 10^{-34} \cdot \pi^2}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot (10^{-9})^2} \cdot n^2 \right) \text{ J} \\ \approx (6,0 \cdot 10^{-20} \text{ J}) \cdot n^2$$

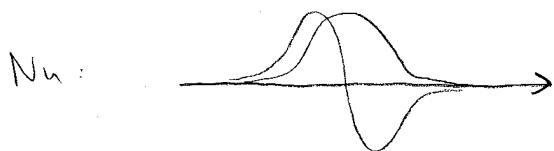
energierna kan bli oändligt
höga för $n \rightarrow \infty$, men det är ofrökaliskt
och beror bara på att vi satt $V = \infty$ för $x < 0, x > d$.



randvillkoren ändras:
 inte längre $\phi(0) = 0$, $\phi(d) = 0$
 utan måste "pussla ihop"
 med exponentiell-liknande kurva



inga "svansar"



får "svansar"

Energierna är fortfarande kvantiserade ($E_1, E_2, \dots$)
 men för $E_n > V_0$ finns inga bundna tillstånd
 längre. (Däremot finns "fria" (joniserade) tillstånd.)
 Det är förklaringen till att det ofysikaliskt
 nog finns oändligt högt E_n i förra uppgiften;
 en sådan atom skulle inte gå att jonisera.

c)

$$\begin{aligned}\phi''(x) &= \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) + E_{\text{extra}} - (E + E_{\text{extra}})) \phi(x) \\ &= \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) \phi(x)\end{aligned}$$

Tidsberoende S.E. oförändrad $\Rightarrow \phi(x)$ oförändrad

Men $\psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(E + E_{\text{extra}})t} \phi(x)$ ändras faktiskt.

Är fasen observerbar?

För stationära tillstånd är den inte det. $P = |\phi(x)|^2$
 förblir oförändrad. Men för tillstånd som



inte är stationära, t.ex. en elektron i en av
greparna i en tvågräpspotential, verkar det som
om fäsen kanske är observerbar? (För vi lägger
ihop vågfunktioner med olika energier.) Men
så länge forskilnaden är oförändrad, och
det är den ju om vi skiftar alla energier uppåt,
så kan vi inte observera den här förändringen.

Fysikaliskt verkar det alltså inte spela någon
roll om vi ändrar nollpunktsenergin — som
vi är vana i klassisk fysik. Så $\psi(x,t)$ är praktiskt
taget oförändrad!

(Överkurs: det är annorlunda i en teori
som tar gravitation med i beräkningen,
för energi graviterar. Men det är
"kvantgravitation", som inte ingår i kursen!)

④

a) i 2c fick vi 0 fotoner.
i uppställningen här för vi

$$\langle -S | +T \rangle \langle +T | -S \rangle + \langle -S | -T \rangle \langle -T | -S \rangle \\ = \langle -S | -S \rangle = 1$$

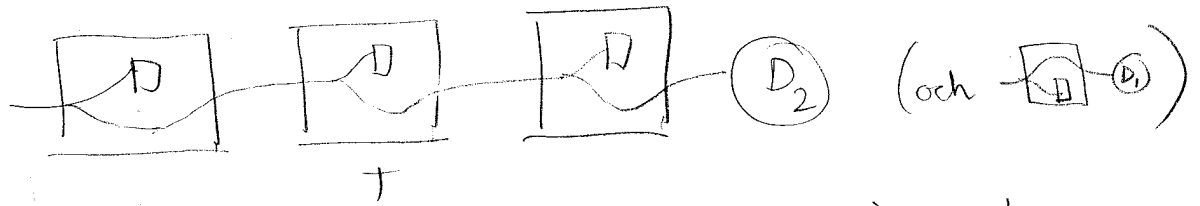
dvs $2000 \cdot 1 = 2000$ teoretiskt.

I praktiken blir det :

2000 ~~~~~
0 ~~~~~

(lite experimentell
variation)

- b) all. b) motvarar att få samma av
både $|+S\rangle$ och $|-S\rangle$, dvs. $\frac{1}{2} \cdot 2000 = 1000$
Vi kan gissa



$$\langle -S | -T \rangle \langle -T | -S \rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{foton i } D_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{inte } \frac{1}{2}! \text{ Näslan.}$$

Så vi måste rotera T lite grand för
att få amplitud $\frac{1}{\sqrt{2}}$, så $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Det är svårt att veta, så du får
poäng för ovanstående uppställning
som åtminstone är i rätt riktning!

All. c) är däremot ingen uppställning alls
utan när man lyfter på skynket i experimentet
för man ih fotoner "utifrån" utan att öka
på lasern. Det visar hur känsliga de
här kvantoptikexperimenten är. (Notera att
tak-lampen i labbet inte var på!)

Det är OK att svara "all. c går inte
för vi kan inte få fler fotoner".

(LITTE SVÅR UPPGIFTER! 5p...)

5

$P(t) = \cos^2 \frac{At}{\hbar}$ att hitta $|1\rangle$ efter tiden t .

Spels $|1\rangle$
objekt $|2\rangle$

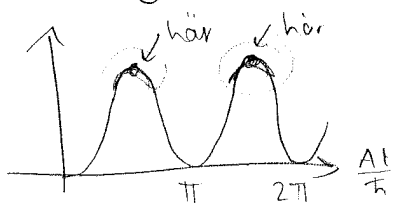
Då är sannolikheten $1 - P(t) = 1 - \cos^2 \frac{At}{\hbar}$
 $= \sin^2 \frac{At}{\hbar}$

(trigonometriska ettan)

att hitta $|2\rangle$ efter tiden t .

Det räknade vi också ut direkt från $\psi(t)$ på kursen, så man måste inte kunna trig. ettan.

Hur ofta dyker det upp en elektron i $|2\rangle$?



vinkelfrekvens

$$\omega = \frac{A}{\hbar} \cdot 2$$

($\cos^2 x$ har period π , inte 2π , men det är inte så roga här om man inte tar med 2:an)

frekvens: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2A/\hbar}{2\pi} = \frac{A}{\pi\hbar} \approx 5 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$

(det är så grov räkning att 10^{10} Hz och 10^{11} Hz är helt ok)

Ström $I = (\text{e per sekund}) \cdot (\text{e laddning})$

$$= 5 \cdot 10^{10} \text{ e/sekund} \cdot 1,6 \cdot 10^{19} \text{ C}$$

$$= 8 \cdot 10^{-9} \text{ A} = \underline{\underline{8 \text{ nA}}}$$

Väldigt svag ström men sådana svaga strömmar går att mäta!

⑥

Nedkvark och råkvark:

$$|d'\rangle = 0,98|d\rangle + 0,2|s\rangle$$

$$|s'\rangle = 0,2|d\rangle + 0,98|s\rangle$$

(talen är lite
justerade från
de riktiga)

a) $P(|s\rangle \text{ givet } |d'\rangle) = |\langle s|d'\rangle|^2$

$$= |\langle s|(0,98|d\rangle + 0,2|s\rangle)|^2$$

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$$

$$= |0,98\langle s|d\rangle + 0,2\langle s|s\rangle|^2$$

$$= |0,98 \cdot 0 + 0,2 \cdot 1|^2$$

$$= |0,2|^2 = 0,04$$

$$= 4\%$$

b)

vi vet att tillstånden med bestämda energier är stationära. Som i exemplet med maser är det de tillstånden som kan ta sig makroskopiska (stora) avstånd. Eftersom $|d'\rangle$, $|s'\rangle$ enligt uppgiften motsvarar stationära tillstånd är den kvark som verkligen mäts den stationära, dvs. de är i viss bemärkelse de "riktiga" kvarkarna.

Tack vare mixningen kan de användas i varandra trots att $|d\rangle$ och $|s\rangle$ inte kan det!

(LITE SVÅRT! 5p...)
(LITE SVÅRT! 5p...)

