



Tentamen, Kvantfysikens principer, FK2003, 7,5hp

Tid: 9.00-15.00, måndag 15/3 2010

Hjälpmedel: utdelad formelsamling, miniräknare (inte Physics Handbook eller Mathematics Handbook!)

Var noga med att tydligt redovisa uträkningar och att ge tydliga men kortfattade motiveringar till alla svar.

Maxpoäng är 100p. Betyg sätts utifrån kursens betygskriterier. Lycka till! MB

1. Den kvantfysiska obestämdheten i hastighet hos en viss elektron är $\Delta v = 1$ m/s. Vi mäter elektronens läge med mätutrustning som har en experimentell osäkerhet av 1 cm. Beskriv Heisenbergs obestämdhetsrelation, och förklara om och hur den spelar in i den här mätningen. (10p)

2. En elektron är i tillståndet

$$|\phi\rangle = C(2|+\rangle - 3|-\rangle)$$

där $|+\rangle$ är spinn upp, $|-\rangle$ är spinn ned och C är en konstant.

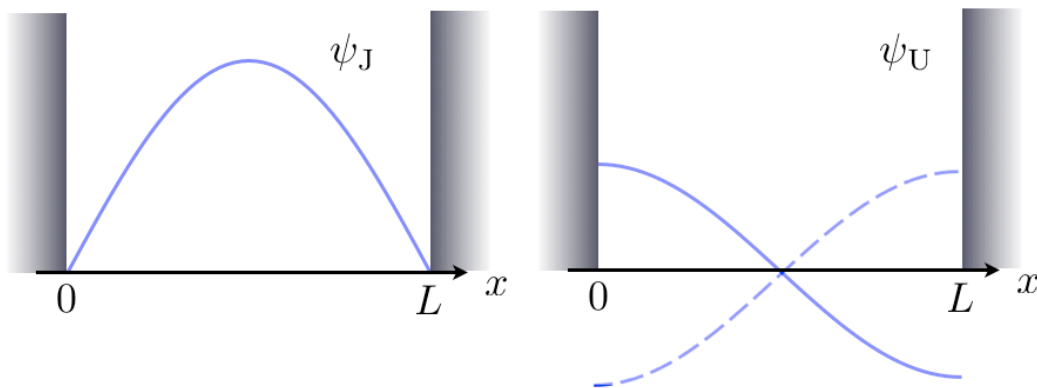
a) Bestäm konstanten C genom att normera tillståndet, dvs. försäkra dig att summan av sannolikheterna för alla möjliga mätutfall är 100%. (7p)

b) Elektronen skickas genom en Stern-Gerlach-apparat S som har kanalen $|S+\rangle$ öppen och kanalen $|S-\rangle$ blockerad. Vad är sannolikheten att elektronen tar sig igenom Stern-Gerlach-apparaten? (8p)

3. Betrakta vågfunktionerna

$$\psi_J(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$
$$\psi_U(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Vad händer med dem under en reflektion i en vertikal linje $x = L/2$, dvs. reflektion runt gropens mitt? Man ser det i graferna på nästa sida.



Den till vänster ändras inte av reflektionen, medan den till höger blir den streckade grafen, som är minus den ursprungliga grafen. Vi kan beskriva reflektionen runt mittpunkten matematiskt genom att ersätta x med $L - x$. Då gäller

$$\psi_J(L - x) = \psi_J(x) \quad (\text{jämn}) \quad (1)$$

$$\psi_U(L - x) = -\psi_U(x) \quad (\text{udda}). \quad (2)$$

Vi kan visa det från uttrycken ovan med hjälp av de fyra identiteterna $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ och $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$. Egenskaperna i ekvation (1) och (2) kallas *symmetrier*, och sådana kan vara användbara för att gruppera olika lösningar till en viss ekvation, här Schrödingerekvationen.

a) Bägge vågfunktionerna ψ_J och ψ_U verkar vid första anblick lösa tidsoberoende Schrödingerekvationen för oändlig potentialgrop

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \text{ ligger mellan } 0 \text{ och } L \\ \infty & \text{för övriga värden av } x \end{cases} \quad (3)$$

men bara en av de två vågfunktionerna är tillåten. Vilken, och varför? (Ditt svar i den här deluppgiften behöver inte använda sig av symmetrierna.) (10p)

b) För ändlig potentialgrop

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \text{ ligger mellan } 0 \text{ och } L \\ k & \text{för övriga värden av } x \end{cases} \quad (4)$$

där k är en konstant med enheten energi, kan man i motsats till i förra uppgiften betrakta båda vågfunktionerna ψ_J och ψ_U som approximativa lösningar av tidsoberoende Schrödingerekvationen i regionen mellan 0 och L . Skissa en jämn och en udda exakt vågfunktion i det här fallet och förklara grafiskt vad som händer med dem när $k \rightarrow \infty$ (potentialgropens väggar blir högre och högre). (10p)

c) Om du får ett laboratorium med en generator av elektriskt fält E , en partikel med laddning q och massa m , vad skall du göra för att i stora drag återskapa situationen $k \rightarrow \infty$ i föregående deluppgift? (10p)

4. I den här uppgiften studerar vi följande tre atomer: väte (1 proton, 1 elektron), helium (2 protoner, 2 elektroner) och litium (3 protoner, 3 elektroner). (Antalet *neutroner*

är inte viktigt i den här uppgiften.)

a) Skissa elektronskalsstrukturen för de tre grundämnena. Vilken aspekt av strukturen du ritat förklaras av Pauliprincipen? (10p)

b) Elektroner är fermioner. Skissa hur elektronsskalsstrukturerna i föregående deluppgift skulle se ut i ett annat universum där elektroner är bosoner. Förklara i några meningar varför Pauliprincipen är så viktig för grundämnenas periodiska system, genom att ge ett exempel på hur någon kemisk egenskap hos väte, helium eller litium skulle vara drastiskt annorlunda i det här alternativa universat. (10p)

5. En partikel beskrivs av ett tvåttillståndssystem $|1\rangle$ och $|2\rangle$. Vi preparerar partikeln i ett av tillstånden, skickar in den i en apparat A och mäter vilket tillstånd den befinner sig i när den kommer ut ur apparaten. Apparaten A beskrivs av de kvantmekaniska amplituderna

$$\langle 1|A|1\rangle = 0 \quad \langle 1|A|2\rangle = i \quad \langle 2|A|1\rangle = -i \quad \langle 2|A|2\rangle = 0 .$$

a) Om vi skickar in systemet i tillstånd $|1\rangle$, vad är sannolikheten $P_{1,1}(A)$ att mäta tillstånd $|1\rangle$ efter passage genom apparaten A ? (4p)

b) Om vi skickar in systemet i tillstånd $|1\rangle$, vad är sannolikheten $P_{1,2}(A)$ att mäta tillstånd $|2\rangle$ efter passage genom apparaten A ? (4p)

c) Om vi skickar in 1000 partiklar i tillstånd $|1\rangle$ en och en, hur många partiklar mäter vi totalt i tillstånd $|2\rangle$ efter passage genom apparaten A ? (4p)

d) Om vi i experimentet inte uppmäter precis värdet du angivit i föregående deluppgift för antalet partiklar i tillstånd $|2\rangle$, hur tolkar du det? I den situationen, vad kan du säga om antalet partiklar vi mäter i tillstånd $|1\rangle$ efter att de gått igenom apparat A ? (4p)

6. Den här uppgiften är en utvidgning av föregående uppgift. Betrakta en annan apparat B för vilken

$$\langle 1|B|1\rangle = 1 \quad \langle 1|B|2\rangle = 0 \quad \langle 2|B|1\rangle = 0 \quad \langle 2|B|2\rangle = -1 .$$

Vi seriekopplar två apparater av typerna A och B , antingen B först och A sist (skrivs AB , kom ihåg att man läser från höger till vänster) eller tvärtom.

a) Om vi skickar in systemet i tillstånd $|1\rangle$, vad är sannolikheten $P_{1,2}(AB)$ att mäta tillstånd $|2\rangle$ efter passage genom apparaten AB ? (3p)

b) Om vi skickar in systemet i tillstånd $|1\rangle$, vad är sannolikheten $P_{1,2}(BA)$ att mäta tillstånd $|2\rangle$ efter passage genom apparaten BA ? (3p)

c) Om vi skickar in systemet i tillstånd $|1\rangle$, vad är sannolikheten $P_{1,2}(C)$ att mäta tillstånd $|2\rangle$ efter passage genom den s.k. *kommutator*-apparaten $C = \frac{1}{2}(AB - BA)$? Förklara den fysikaliska skillnaden mellan $P_{1,2}(C)$ och sannolikheten $\frac{1}{2}(P_{1,2}(AB) - P_{1,2}(BA))$ som du kan räkna ut från dina värden i tidigare deluppgifter. (3p)