Kvantfysikens principer Lösningsförslag tenta 17/12 2009

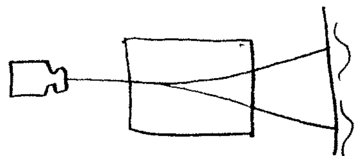
1

Klassisk fysik: kontinuerliga storheter och tillstånd ($x = 0{,}1\,m$, $0{,}2\,m$ och allt däremellan)

Kvantfysik:
- diskreta, stegvisa storheter och tillstånd ($|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$, eller $|+S\rangle$ osv.),
- "kvantum" = "viss myckenhet" (SAOB),
- sannolikheter, inte exakta utsagor för enstaka experiment

Bra exempel på experiment:

- Stern-Gerlach



mäts: separation på skärm

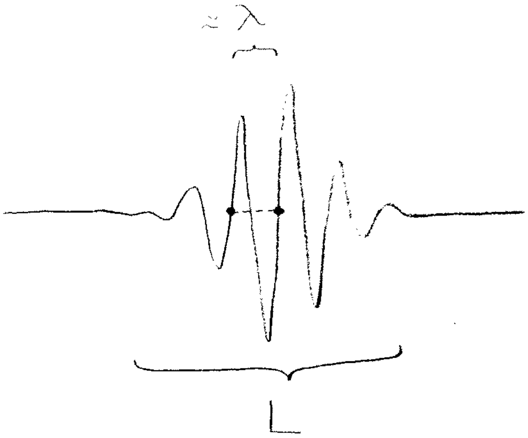
tolkning: spinn-kvantisering

- Absorption i gas

mäts: spektrallinjer

tolkning: kvantiserade energinivåer

(2)



se även Feynman sektion 2-2.

a) Antal vågor: $n = \frac{L}{\lambda} = \frac{L}{2\pi/k} = \frac{kL}{2\pi}$

$$\Delta n = \frac{\Delta k \cdot L}{2\pi}$$

(om L hade varit mer osäker hade vi haft en till term, se Extra 1)

$$\Delta k = \frac{2\pi \Delta n}{L}$$

$p = mv$ så $v = \frac{p}{m}$, och $p = \hbar k$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{\hbar k}{m}$$

$$\Delta v_x = \frac{\hbar \Delta k}{m}$$

(ingen osäkerhet i $\hbar$, m)

$$= \frac{\hbar \cdot \frac{2\pi \Delta n}{L}}{m} = \frac{2\pi\hbar \cdot \Delta n}{mL} \qquad (*)$$

$$= \frac{2\pi \cdot 1{,}05 \times 10^{-34}\,\text{Js} \cdot 1}{9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 1\,\text{nm}}$$

$$\approx \underline{\underline{7 \cdot 10^{5}\ \text{m/s}}}$$

så den är väldigt osäker.

b) $\Delta x \cdot \Delta p_x = \Delta x \cdot m \cdot \Delta v_x \overset{(*)}{=} \Delta x \cdot m \cdot \frac{2\pi\hbar\Delta n}{mL}$

$$= \Delta x \cdot \frac{2\pi\hbar\,\Delta n}{L} = \underbrace{\frac{\Delta x}{L}}_{1/2} \cdot 2\pi\hbar \cdot \underbrace{\Delta n}_{1} > \frac{\hbar}{2}$$

Förenligt med $\Delta x \Delta p_x > \frac{\hbar}{2}$.

c) $\Delta x \cdot \Delta p_x = \frac{\Delta x}{L} \cdot 2\pi\hbar \cdot \Delta n$

eftersom osäkerheten i läget ges av vågpaketets längd (här har vi uppskattat $\Delta x = \frac{1}{2} \cdot L$)
så beror detta inte alls på L.
Obestämdhetsrelationen är universell, dvs. beror inte på våglängder eller längd på vågpaket.

---

(3)

a) rent tillstånd

b) Två vägar:

$$\langle -S | +T \rangle \langle +T | -S \rangle + \langle -S | -T \rangle \langle -T | -S \rangle \qquad (*)$$

om vi använder formel (52) ser vi att $\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$, dvs $|+T\rangle\langle +T| + |-T\rangle\langle -T| = 1$,
så $(*)$ är lika med $\langle -S | -S \rangle$,
vilket i sin tur enligt (49) är lika med 1.

c) $$P = |\langle -S | +T \rangle \langle +T | -S \rangle + \langle -S | -T \rangle \langle -T | -S \rangle|^2$$
$$= |1|^2 = 1$$ beror inte alls på ϕ.

d) 5000 P(komma från P till R)
$= 5000 \cdot 1 = 5000$.

e) $5000 \cdot \underbrace{P(\text{komma från } P \text{ till } Q)}_{|\langle +T|-S\rangle|^2 + |\langle -T|-S\rangle|^2} = \underline{\underline{5000}}$

(olika sluttillstånd kan inte interferera, så addera efter kvadreringen)

$$= \left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^2$$

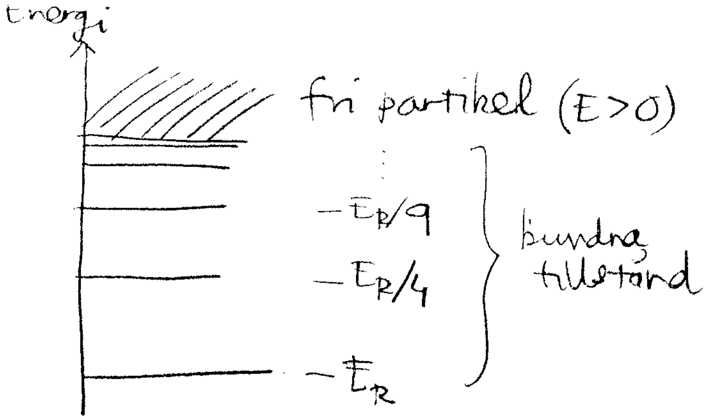
$$= 1 \qquad \text{(trigonometriska ettan)}$$

Vi kan också se det fysikaliskt:
T är helt öppen, så vi kan betrakta det som om den inte vore där alls.

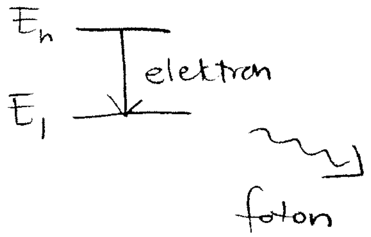
f) om tillståndet innan apparaten är $|+S\rangle$: $P = 0$
$|-S\rangle$: $P = 1$

men vi vet inte innan vi preparerar ett rent tillstånd om vi har $|+S\rangle$ eller $|-S\rangle$, så om in-strålen är opolariserad, får vi 0 partiklar med 50% chans och 1 partikel med 50% chans, men slumpen avgör vad det blir, så i praktiken kan vi inte säga någonting med säkerhet om mätresultatet.

4 a) $E_n = -\dfrac{E_R}{n^2}$



b) $E_\gamma = \hbar\omega$ $\qquad \gamma$ = foton



energins bevarande:

$$E_n - E_1 = E_\gamma$$

$$-\frac{E_R}{n^2} - \left(-\frac{E_R}{1^2}\right) = E_\gamma$$

dvs. $$E_\gamma = E_R \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\hbar\omega = E_R \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Foton: $$\omega = kc = \frac{2\pi}{\lambda} c \qquad (f \cdot \lambda = v = c)$$ $\quad 1/T = \omega/2\pi$

dvs. $$\hbar \cdot \frac{2\pi}{\lambda} c = E_R \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar \cdot c}{E_R\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{2\pi \cdot 1{,}05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}}{13{,}6\,\mathrm{eV} \cdot (1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{J/eV})} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

$$\approx 9{,}10 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m} \cdot \frac{n^2}{n^2 - 1}$$

$$= 910\,\text{Å} \cdot \frac{n^2}{n^2 - 1}$$

enhetskoll: $\dfrac{\cancel{\mathrm{J}}\cancel{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{m}/\cancel{\mathrm{s}}}{\cancel{\mathrm{eV}} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{J}}}{\cancel{\mathrm{eV}}}} = \mathrm{m}$

Om vi stoppar in $n = 2$: (dvs. $E_2 \downarrow E_1$)

$$\lambda = 910\,\text{Å} \cdot \underbrace{\frac{2^2}{2^2-1}}_{\frac{4}{4-1} = \frac{4}{3}} \approx \underline{\underline{1213\,\text{Å}}}$$

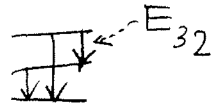
$n = 3$:
$$\lambda = 910\,\text{Å} \cdot \underbrace{\frac{3^2}{3^2-1}}_{\frac{9}{9-1} = \frac{9}{8}} \approx \underline{\underline{1023\,\text{Å}}}$$

Svaret blir inte <u>precis</u> som i experimentet, dels för att vi bara angivit 3 värdesiffror (så sista är osäker), dels för att det finns ytterligare små effekter som vi försummat.

c) två linjer = två övergångar $\downarrow E_{21}$, $\downarrow E_{31}$

$\Rightarrow$ minst tre tillstånd (nivåerna 3, 2, 1)

$\Rightarrow$ finns en till!



$$\begin{aligned}
E_{32} &= E_{31} - E_{21} \\
&= (E_3 - E_1) - (E_2 - E_1) \\
&= E_3 - E_1 - E_2 + E_1 \\
&= E_3 - E_2 = E_R\left(-\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2}\right) = \frac{5}{36} E_R
\end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar \cdot c}{\frac{5}{36} E_R} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{förra sidan}}}{=} 910\,\text{Å} \cdot \frac{36}{5} = \underline{\underline{6552\,\text{Å}}}$$

(jfr. 6563 Å i verkligheten)

den här linjen är alltså inte med i Lymanserien, utan långt utanför till höger.

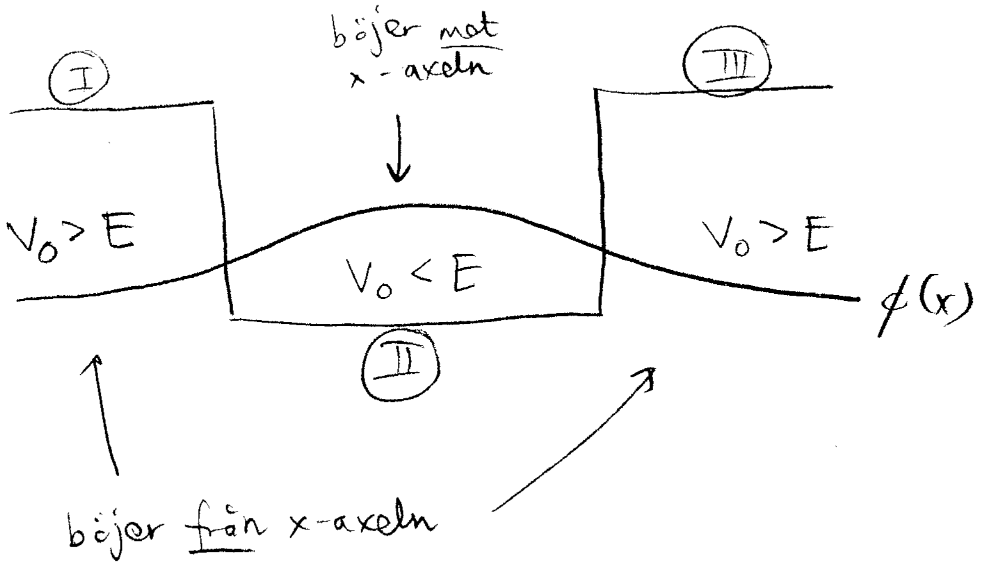
Den är med i Balmerserien.

d) Balmerseriens fotoner har längre våglängd, som man lätt kan räkna ut t.ex. som i förra uppgiften (om man insett att E_{32} hör till just Balmerserien).

Längre än ultraviolett $\Rightarrow$ går in i det synliga spektrat, som man kan ta kort på med vanlig kamerautrustning.

5

a)



S.E: $$\phi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\underbrace{(V(x) - E)}\phi(x)$$

$> 0 \Rightarrow$ mot.

$< 0 \Rightarrow$ från.

b) I $\phi(x) = a e^{\kappa x}$ (b = 0, annars inte normerbar)

II $\phi(x) = a \sin kx + b \cos kx$

III $\phi(x) = b e^{-\kappa x}$ (a = 0, annars inte normerbar)

i I & III har vi $\kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$

i II har vi $k = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

för att $V_0 = 0$ i område II.

(här gäller det att inte bara skriva av formelsamlingen, utan förstå att V_0 är V_0 i det relevanta området.)

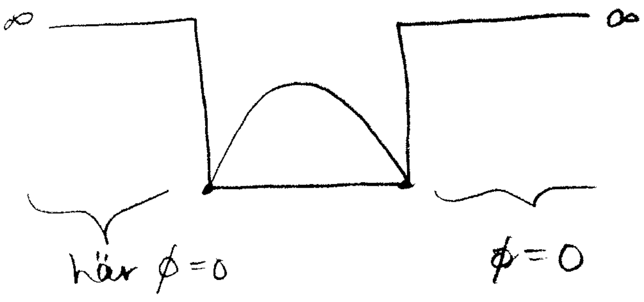
Alltså $$\frac{\kappa}{k} = \frac{\sqrt{\frac{\cancel{2m}(V_0 - E)}{\cancel{\hbar^2}}}}{\sqrt{\frac{\cancel{2m}E}{\cancel{\hbar^2}}}} = \frac{\sqrt{V_0 - E}}{\sqrt{E}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{V_0}{E} - 1}}}$$

Att uppskatta detta är inte så lätt, så alla ideer premieras (men man får 4p för att komma hit.)

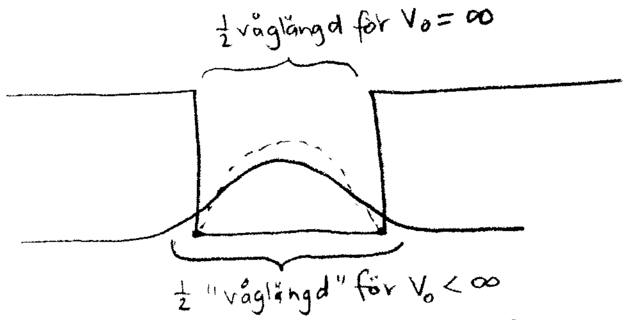
Man kan prova att lösa ekvationen "tan(..) = ..." med miniräknaren (E = 0,7 eV blir svaret), eller jämföra med $V_0 \to \infty$ som i uppg. c.

Svar: $\frac{\kappa}{k} \approx 0.65$

c) vi vet att för $V_0 \to \infty$ kan elektronen inte komma ut.



när vi passerat $V_0 > 2E$ så är energin mer och mer jämförbar med $V_0 \to \infty$:



då kan vi säga dels att elektronen mest är inne i gropen, dels att våglängden därinne ($\lambda = \frac{2\pi}{k}$) är aningens större än den för $V_0 = \infty$ (då $k \cdot d = n\pi$, dvs. grundtillståndet $n=1$ har $k = \pi/d$, så $\lambda = 2d$.)) dvs den ändliga gropen har grundtillstånd med något lägre energi än $V_0 = 0$, dvs.

$$\frac{V_0}{E} \to \infty$$

för grundtillstånd

$$2\frac{\sqrt{\frac{V_0}{E}-1}}{2-\frac{V_0}{E}}$$

högerledet $\to 0$

vi får $\tan(k \cdot L) = 0$

vilket ger samma lösningar som $\sin(kL) = 0$,

dvs. $kd = n \cdot \pi$.