

Teutamen Kvantfysikens principer (FK 2003)

2010-03-15

LÖSNINGSFÖRSLAG

①

$$\Delta v = 1 \text{ m/s}$$

$$m = m_{\text{elektron}} = m_e$$

$$(\Delta x)_{\text{exp}} = 1 \text{ cm}$$

$$\Delta x = \text{kvantfys. obestämthet}$$

Obestämthetsrelationen är universell
men man märker bara dess effekter
i väldigt noggranna experiment.

Här har vi
$$\Delta x \cdot \Delta p \leq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x \leq \frac{\hbar}{2\Delta p} = \frac{\hbar}{2m_e \Delta v}$$

(massan inte osäker, så $\Delta p = m \Delta v$)

$$\Delta x \leq \frac{1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2 \cdot (9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (1 \text{ m/s})} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Eftersom vi har ett rätt grovkornigt experiment
($(\Delta x)_{\text{exp}} \gg \Delta x$) så märker vi inte obestämtheten
från kvantfysik i det här experimentet.

② a) $|\phi\rangle = C(2|+\rangle - 3|-\rangle)$

Amplitud att gå in i $|+\rangle$ - tillståndet:

$$\begin{aligned}\langle +|\phi\rangle &= \langle +|(C(2|+\rangle - 3|-\rangle)) \\ &= 2C \cdot \underbrace{\langle +|+\rangle}_1 - 3C \cdot \underbrace{\langle +|-\rangle}_0\end{aligned}$$

formel (4) $\xrightarrow{\quad\quad\quad}$

$$= 2C$$

Amplitud att gå in i $|-\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle -|\phi\rangle &= \langle -|(C(2|+\rangle - 3|-\rangle)) \\ &= 2C \underbrace{\langle -|+\rangle}_0 - 3C \underbrace{\langle -|-\rangle}_1 \\ &= -3C\end{aligned}$$

Sannolikheter: $P(+)=|2C|^2=4C^2$
(antag C reell)

$$P(-)=|-3C|^2=9C^2$$

Sannolikhet att något skall hända (antingen mäta $+$ eller $-$):

$$P(+)+P(-)=4C^2+9C^2=13C^2$$

Sätt detta lika med 100%, dvs. 1:

$$13C^2=1 \Rightarrow C=\frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\underline{\underline{|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}(2|+\rangle - 3|-\rangle)}}$$

2b) S-6-apparat $\begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix}$ 

amplitud för $|\phi\rangle$ att komma igenom:
 samma sak för $|\phi\rangle$ att vara i tillståndet $|+\rangle$

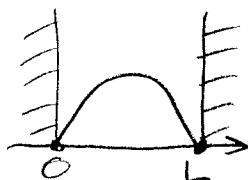
$$= \langle + | \phi \rangle = 2C = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$P(+)=|2C|^2 = \left| \frac{2}{\sqrt{13}} \right|^2 = \frac{4}{13} \approx 0,31 = \underline{\underline{31\%}}$$

③

a)

ψ_5



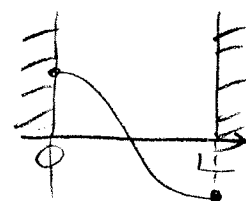
Randvillkor
 för $k = \infty$:

$$\psi(0) = 0, \psi(L) = 0$$

tillåten

$$\psi(0) = 0 \\ \psi(L) = 0$$

ψ_0



ej tillåten

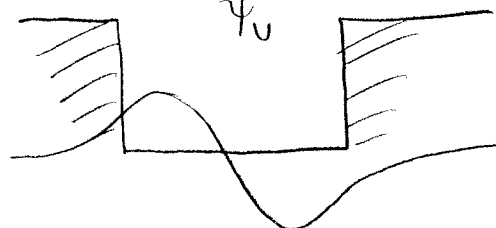
$$\psi(0) \neq 0 \\ \psi(L) \neq 0$$

b)

ψ'_5



ψ'_0

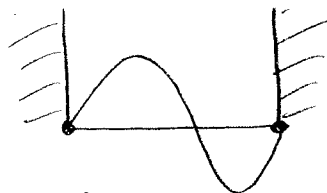


När väggarna blir högre och
 högre minskar sannolikheten att
 hitta partikeln i väggen.

↓ $k \rightarrow \infty$



ψ_5

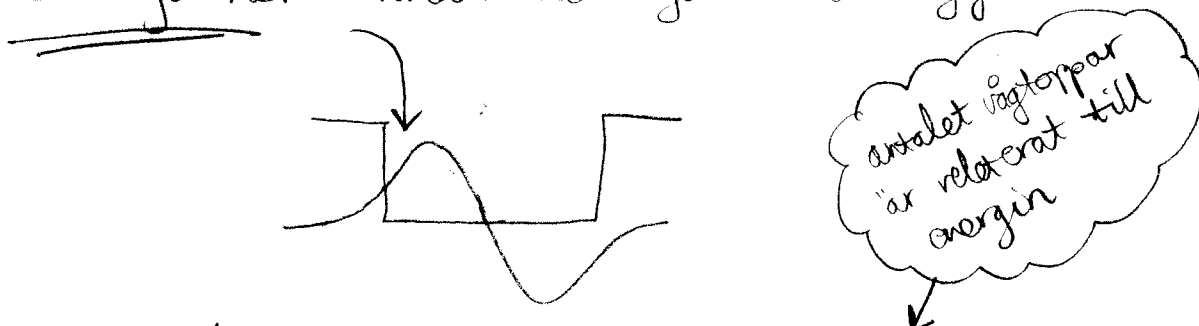


inte ψ_0 !

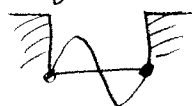
v.g.v.

③ b) forts.

vi ser att när $k < \infty$ kan man i och för sig ha en udda vågfunktion, men den måste "svänga ner" innan den går in i väggen.



Det betyder att den är en högre energinivå och funktionen på föregående sida



är mycket riktigt nästa högre energitillstånd ($n=2$).

Från detta kan man gissa sig till (men det var inte en del av uppgiften) att medan grundtillståndet  alltid finns, behövs en viss minimi-höjd på potentialgröppens väggar för att det skall finnas ett udda tillstånd.

c) Ställ upp en approximerat 1-dimensionell situation med elektriska kraften $\vec{F} = q\vec{E}$ riktad ihät:

om $q > 0$:



och öka fältstyrkan $\vec{E} \rightarrow \infty$.

④

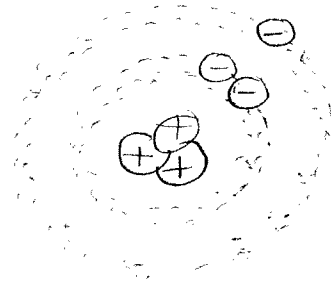
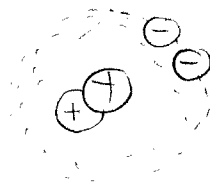
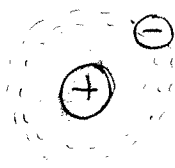
H

He

Li

nytt skal!

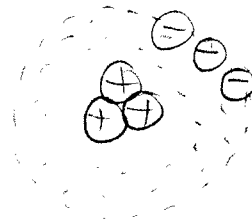
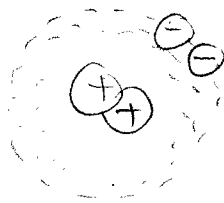
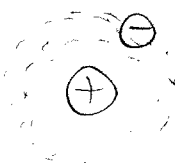
a)



Pauliprinzipen säger att elektronerna (som är fermioner) inte kan vara två med samma spin och energi, så max 2 i första "skalet" (energin).

b)

Feynman fig. 4-11



Litium skulle ha starkare bundna elektroner än H och He, dvs. vara svårare att jonisera, dvs. vara mindre reaktiv.

I verkligheten (uppg. a) är

$E_{\text{jonisering}} \text{ för He} \approx 25 \text{ eV}$

$E_{\text{jonisering}} \text{ för Li} \approx 5 \text{ eV}$ Lättare

att ta bort
yttersta elektronen.
(valenselektronen)

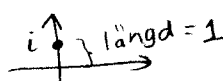
5

a) $\langle 1|A|1\rangle = 0$

$$\Rightarrow P_{11}(A) = |\langle 1|A|1\rangle|^2 = 0$$

b) $\langle 2|A|1\rangle = -i$

$$P_{12}(A) = |\langle 2|A|1\rangle|^2 = |-i|^2 = 1$$

(t.ex. $|-i|^2 = (-i)^*(-i) = (+i)(-i) = -i^2 = +1$)
 eller grafiskt: 

$$P_{12}(A) = \underline{\underline{100\%}}$$

c) $1000 \cdot \underset{\substack{\nearrow \\ P_{12}(A)}}{1} = 1000 \text{ partiklar}$

d) olika möjligheter att det blir fel:

- finns egentligen fler tillstånd, tvåtillstånd var inte så bra approximation, dvs. $|1\rangle$ kommer in men $|3\rangle$ kommer ut.
- "teppar bort" partiklar för att utrustningen missar dem.
- filtret är inte perfekt så några blir egentligen $|2\rangle$.
 Då måste totala antalet $|1\rangle$ och $|2\rangle$ ändå förbli 1000.

⑥ Formlerna (8) och (4) är användbara här:

Sätt $A \rightarrow AB$,
 BA
i formeln

$$\langle x|A|\phi \rangle = \sum \langle x|i \rangle \langle i|A|j \rangle \langle j|\phi \rangle$$

$$\langle i|j \rangle = \delta_{ij}$$

Men man måste inte använda dem.

a) amplitud för $|1\rangle \rightarrow AB \rightarrow |2\rangle$:

$$\langle 2|AB|1\rangle = \langle 2|A|1\rangle \langle 1|B|1\rangle + \langle 2|A|2\rangle \langle 2|B|1\rangle$$

$$\underset{\text{läs av}}{=} (-i) \cdot 1 + 0 \cdot 0$$

$$= -i$$

$$P_{1,2}(AB) = |-i|^2 = 1 = \underline{\underline{100\%}} \quad (\text{se förra upg.})$$

b) amplitud för $|1\rangle \rightarrow BA \rightarrow |2\rangle$

$$\langle 2|BA|1\rangle = \langle 2|B|1\rangle \langle 1|A|1\rangle + \langle 2|B|2\rangle \langle 2|A|1\rangle$$

$$\underset{\text{läs av}}{=} 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-i)$$

$$= +i$$

$$P_{1,2}(BA) = |i|^2 = 1 = \underline{\underline{100\%}}$$

⑥ c) $P_{1,2}(C) \quad ?$

$$\langle 2|C|1\rangle = \langle 2|\frac{1}{2}(AB-BA)|1\rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle 2|AB|1\rangle - \frac{1}{2} \langle 2|BA|1\rangle$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-i) - \frac{1}{2} \cdot (+i)$$

$$\text{från a)} \qquad \text{från b)}$$

$$= -\frac{i}{2} - \frac{i}{2} = -i$$

$$P_{1,2}(C) = |\langle 2|C|1\rangle|^2 = |-i|^2 = 1 = 100\%$$

men $\frac{1}{2} (P_{1,2}(A)P_{1,2}(B) - P_{1,2}(B)P_{1,2}(A)) = 0$

(notera: oavsett vad de talen är
blir det noll, för för
vilka tal som helst är
 $a \cdot b - b \cdot a = 0$)

I kvantfysik kan amplituder interferera
(här konstruktivt) vilket sannolikheter
inte kan. (Man brukar uttrycka det som
att apparaterna A och B inte "kommuterar".)

SLUT.