

LÖSNINGSFÖRSLAG

TENTAMEN FK2003 (Kvantfysikens principer)

Marcus Berg

2012-12-21

① Uppg. 2-P2 i Kvantfysik

$$p = mv \Rightarrow \Delta v = \frac{\Delta p}{m_e}$$

Obestämdheten i läge kan uppskattas som atomens storlek. Du bör veta att det är runt $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$, men andra ungefärliga värden godtas. $\Delta x \approx 10^{-10} \text{ m}$

$\Delta x \Delta p \approx \hbar$ som minst, dvs.

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x}$$

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m_e} = \frac{\hbar}{m_e \Delta x} \approx \frac{1 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 10^{-10} \text{ m}} \approx \underline{\underline{10^7 \text{ m/s}}}$$

Hastigheten är väldigt obestämd, för att elektronen pressats in i en liten "låda".

② Uppg. 16-P1 i kompendiet.

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sin x & -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

a) i $-\pi < x < \pi$

måste vara 100% eftersom inte nollskild utanför intervallet.

Pröva: $\int_{-\pi}^{\pi} dx \psi^2(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{\pi} \sin^2 x = \pi \cdot \frac{1}{\pi} = 1$

Notera $\frac{d}{dx} \sin x \cos x = \cos x \cdot \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(Trig. ettan) $\rightarrow = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

alltså: $\sin^2 x = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \sin x \cos x - 1 \right)$

$\int dx \sin^2 x = -\frac{1}{2} (\sin x \cos x - \int dx \cdot 1)$

$= -\frac{1}{2} (\sin x \cos x - x)$

men $[\sin x \cos x]_{-\pi}^{\pi} = 0$, $[x]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$.

b) $0 < x < \pi$

symmetrisk när vi kvadrerar

så måste vara precis hälften: 50%

c) $\psi = 0$ i hela intervallet: 0%

③

a) inga mörka ränder.

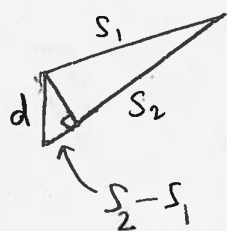
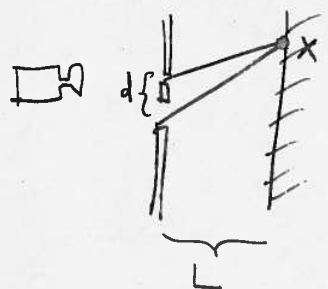
$$I = |I_1|^2 + |I_2|^2$$

ingen interferensterm.

b) en elektron åt gången
men ändå interferens — våg/partikeldualitet.

Ljus bara en stor våg (i modernt språk: många fotoner samtidigt i experimentet) — interferens i klassisk mening

c)



$$s_2 - s_1 =$$

$$\sin \alpha \approx \alpha = \frac{s_2 - s_1}{d}$$

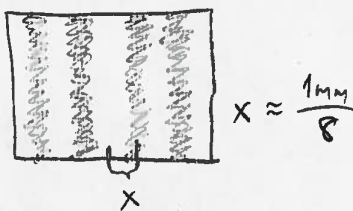
Första mörka randen: $s_2 - s_1 = \frac{\lambda}{2}$ dvs. $\sin \alpha = \frac{\lambda}{2d}$

$$\tan \alpha = \frac{x}{L} \approx \alpha$$



$$\frac{x}{L} \approx \frac{\lambda}{2d}$$

$$\lambda = \frac{2d \cdot x}{L}$$



$$\lambda = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{8} \cdot 10^{-3}}{1 \text{ m}} = 2.5 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$\approx \underline{\underline{3 \text{ nm}}}$$

d) $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$

energin bevarad: $E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}} = q \Delta V = e \Delta V$

en värdesiffra
- OK!

$$\frac{p^2}{2m} = e \cdot \Delta V, \text{ dvs. } p = \sqrt{2m \cdot e \Delta V}, \quad h = 2\pi \hbar = 2\pi \cdot \frac{p}{k} = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{2m e \Delta V}}{2\pi/\lambda}$$

$$(\text{och } k = \frac{2\pi}{\lambda}) \quad \approx \underline{\underline{1.6 \cdot 10^{-33} \text{ Js}}}$$

④

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (2|1\rangle + |2\rangle)$$

$$c_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 + A)t}$$

$$c_2(t) = \frac{a}{2} (-1) - \frac{b}{2} (-1)$$

vi ser att $c_1(0) = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$

$$c_2(0) = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$$

Det betyder att
$$\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2 \\ \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad \text{enl. ovan}$$

Lös:
$$\begin{cases} a + b = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ a - b = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

addera ekvationerna: $2a = \frac{4+2}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

dvs. $a = 3/\sqrt{5}$

$b = \frac{4}{\sqrt{5}} - a = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \left[\left(\frac{3}{2\sqrt{5}} e^{\frac{i}{\hbar}At} + \frac{1}{2\sqrt{5}} e^{-\frac{i}{\hbar}At} \right) |1\rangle + \left(\frac{3}{2\sqrt{5}} e^{\frac{i}{\hbar}At} - \frac{1}{2\sqrt{5}} e^{-\frac{i}{\hbar}At} \right) |2\rangle \right]$

glöm inte $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, halvan!

Ser: kan inte förenkla med Eulers formel

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ som vi gjorde förut.

b) Amplituderna och sannolikheterna

kommer att vara tidsberoende, för

"t" står inte bara framför i en fasfaktor.

Inte stationärt. (= P konstant.)

$$\begin{aligned}
 c) \quad \langle 1 | \psi(t) \rangle &= \langle 1 | e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} \left[\left(\frac{3}{2\sqrt{5}} e^{\frac{i}{\hbar} A t} + \frac{1}{2\sqrt{5}} e^{-\frac{i}{\hbar} A t} \right) | 1 \rangle \right. \\
 &\quad \left. + (\text{termer med } | 2 \rangle) \right] \\
 &= e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} \left(\frac{3}{2\sqrt{5}} e^{\frac{i}{\hbar} A t} + \frac{1}{2\sqrt{5}} e^{-\frac{i}{\hbar} A t} \right) \\
 &\quad \left(\text{för } \langle 1 | 1 \rangle = 1, \langle 1 | 2 \rangle = 0 \right)
 \end{aligned}$$

Detta är sannolikhetsamplituden. (Den är tidsberoende.)

$$d) \quad P(\text{mät } | 1 \rangle) = |\langle 1 | \psi(t) \rangle|^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} \left(\frac{3}{2\sqrt{5}} e^{\frac{i}{\hbar} A t} + \frac{1}{2\sqrt{5}} e^{-\frac{i}{\hbar} A t} \right) \right|^2 \\
 &= \underbrace{\left| e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} \right|^2}_{=1} \left| \frac{3}{2\sqrt{5}} e^{\frac{i}{\hbar} A t} + \frac{1}{2\sqrt{5}} e^{-\frac{i}{\hbar} A t} \right|^2
 \end{aligned}$$

in för $x = \frac{1}{\hbar} A t$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{1}{2\sqrt{5}} \right|^2 (3e^{\frac{i}{\hbar} A t} + e^{-\frac{i}{\hbar} A t}) \cdot (3e^{\frac{i}{\hbar} A t} + e^{-\frac{i}{\hbar} A t})^* \\
 &= \frac{1}{4 \cdot 5} (3e^{ix} + e^{-ix}) \cdot (3e^{-ix} + e^{ix})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{notera } (e^{ix})^* &= e^{-ix}) &= \frac{1}{20} (3^2 e^{ix-ix} + 3e^{ix+ix} \\
 &+ 3e^{-ix}e^{-ix} + e^{-ix+ix})
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{20} (9 + 3(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 1)$$

$$= \frac{1}{20} (9 + 3 \cdot 2 \cos 2x + 1) = \frac{1}{20} (10 + 6 \cos x)$$

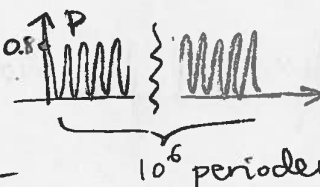
$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cos \frac{2At}{\hbar}}}$$

v.g.v.

om vi räknar ut vinkelfrekvensen ω i $\cos \omega t$,
 ser vi att $\omega = \frac{2\pi}{T} \approx \frac{10^{-19}}{10^{-34}} \approx 10^{15} \text{ s}^{-1}$.

Det betyder att en nanosekund (10^{-9} s)
 som efterfrågas ger runt 10^6 perioder.

Med andra ord (eller bild):



så värdet på P blir väldigt
 känt för vad vi stoppar in för e och h ,

t ex.	$e [\text{C}]$	$h [\text{Js}]$	P	
	$1,6 \cdot 10^{-19}$	$1,05 \cdot 10^{-34}$	0,30	} alla ok som svar!
	$1,60218 \cdot 10^{-19}$	$1,05471 \cdot 10^{-34}$	0,20	
	$1,602176487 \cdot 10^{-19}$	$1,0545715628 \cdot 10^{-34}$	0,73	
	$\vdots$		0,73	

Har vi tillräcklig noggrannhet blir det alltid 0,73.

Men 0,30 (eller annat motiverat svar) är OK.

Poängen här är inte så mycket att skriva in
 exakta värden på e och h utan att
 vi också måste ange t väldigt noggrant.

I praktiska men inte så noggranna experiment
 kan man inte det, då blir oscillationen
 icke observerbar. Man behöver noggranna

experiment i kvantfysik. Se Feynman fig. 1-5.

⑤

$$a) \text{ amplitud} = \langle OS|+T\rangle \langle +T|OS\rangle + \langle OS|OT\rangle \langle OT|OS\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi + \cos \phi \cdot \cos \phi$$

$$\left[\begin{aligned} \text{t.ex. } \langle OS|+T\rangle &= \langle OS|(\frac{1}{2}(1+\cos \phi)|+S\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi |OS\rangle + \frac{1}{2}(1-\cos \phi)|-S\rangle) \\ &\quad \left(\text{för } \langle OS|+S\rangle = 0, \langle OS|-S\rangle = 0 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi \underbrace{\langle OS|OS\rangle}_{=1} \end{aligned} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 \phi + \cos^2 \phi$$

$$b) \text{ amplitud} = \langle -S|+T\rangle \langle +T|OS\rangle + \langle -S|OT\rangle \langle OT|OS\rangle$$

$$= \frac{1}{2} (1-\cos \phi) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi \cdot \cos \phi$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin \phi (1-\cos \phi + 2\cos \phi)$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin \phi (1+\cos \phi)}}$$

$$c) P_{\text{kanal } |OS\rangle} = |\text{amplitud från a})|^2 = \left(\frac{1}{2} \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \right)^2$$

$$P_{\text{kanal } |-S\rangle} = |\text{amplitud från b})|^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 (\sin \phi (1+\cos \phi))^2$$

$$= \frac{1}{8} \sin^2 \phi (1+\cos \phi)^2$$

$$P_{\text{tot}} = \left(\frac{1}{2} \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \right)^2 + \frac{1}{8} \sin^2 \phi (1+\cos \phi)^2$$

("separat" = ingen interferens)

Man behöver inte försöka förenkla vidare!

$$\text{Ex: } \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$d) \quad P_{+4} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{4} + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\left\{ \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \right\}$$

$$= \left(\frac{3}{8} + \frac{2}{8} \right)^2 + \frac{3}{32} \left(\frac{3}{2} \right)^2$$

$$= \frac{5^2}{8^2} + \frac{3}{32} \frac{3^2}{2^2} = \frac{25}{64} + \frac{3}{32} \cdot \frac{9}{4}$$

$$= \frac{50}{128} + \frac{27}{128} = \frac{77}{128} \approx 0.60 = 60\%$$

(OK att bara slå in på miniräknaren,

men jag kunde inte motstå att

räkna ut exakt.) $2000 \text{ partiklar} \cdot 0,6 = \underline{\underline{1200.}}$

en sekvens: 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0

(från den skulle vi uppskatta $P \approx 50\%$.)

⑥

$$a) \quad f(\pi + \theta) = - f(\pi - \theta)$$

↑
protoner = fermioner

interferens: (identiska) $P = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2$

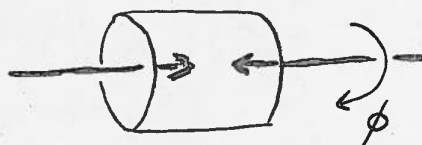
svår: 3

b)

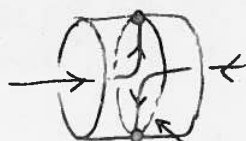
$$P = |f(\frac{\pi}{2}) - f(\pi - \frac{\pi}{2})|^2$$

$$= |f(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{2})|^2 = 0 \quad \text{oavsett } f(\theta)!$$

två fermioner kan inte gå in i samma tillstånd. Inget beror på vinkeln ϕ



så alla tillstånd utefter en cirkel runt strömriktningen räknas som "samma".



alla på den här cirkeln

c) Mät antalet partiklar för olika θ .

Ger statistisk uppskattning av P , inte exakt.

Amplituden $f(\theta)$ kan vi aldrig mäta direkt.