Marcus Berg

Kvantfysikens principer FK2003

Tentamen 14/3 2011

LÖSNINGSFÖRSLAG

---

1 a) Man kan bara upplösa detaljerna om våglängden λ är så liten som detaljerna:

$$\lambda \approx 10 \text{ nm}$$

Elektronen har potentiell energi $E_{pot} = q\Delta V = e\Delta V$ som omvandlas till rörelseenergi $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$

$p = mv$

Energins bevarande $E_{pot} = E_{kin}$

$$e\Delta V = \frac{p^2}{2m}$$

men $p = \hbar k = \hbar \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$ $\quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$

så $e\Delta V = \frac{p^2}{2m} = \frac{(h/\lambda)^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$

$$\Delta V = \frac{h^2}{2me\lambda^2} = \frac{(7\cdot 10^{-34})^2}{2\cdot(1\cdot 10^{-30})(2\cdot 10^{-19})(10\cdot 10^{-9})^2} \text{ V}$$

$$\approx \underline{\underline{15 \text{ mV}}}$$

(testa att icke-relativistiskt om du vill: $v = \frac{p}{m} = \frac{h}{m\lambda} \approx 70 \text{ km/s} \ll c$)

1 b)

$E_\gamma = \hbar\omega$ $\qquad v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = vk = ck$

foton betecknas "γ" (gamma) $\qquad v_\gamma = c$

$$E_\gamma = \hbar\omega = \hbar \cdot ck = \hbar \cdot c \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda} \qquad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$$

Stoppa in siffror : E_{kin} (jfr. förra uppg.) $= \frac{1}{2}mv^2 \approx 0{,}015\,eV$

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(7\cdot10^{-34})(3\cdot10^{8})}{(10\cdot10^{-9})}\,J \approx \underline{\underline{124\,eV}}$$

vi ser att
fotonen har 8000 gånger
mer energi per partikel
$\Rightarrow$ kan skada objektet
(t. ex jonisera väteatomer)

c) $\Delta x \lesssim 10\,nm$

$$\Delta x \,\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1\cdot10^{-34}}{2\cdot(10\cdot10^{-9})}\,kgm/s \approx \underline{\underline{5\cdot10^{-27}\,kgm/s}}$$

Detta räcker som svar, men vad
betyder det för obestämdheten i hastighet?

Uppskatta : Massa $\approx (10^{-8})^3 \cdot 10^3\,kg \approx 10^{-21}\,kg$

$\approx$ vattendensitet (t.ex kisel $\approx 2\cdot$ vatten)

$$\Delta v_x \gtrsim \frac{\Delta p_x}{10^{-21}}\,m/s \approx 5\,\mu m/s$$

men bilden tas snabbt!

d) inte i närmsta framtiden, men i princip ja.

(men för lite större objekt, tex en transistor
runt $\Delta x \simeq 1 \mu m$
får man $\Delta p_x \gtrsim 5 \cdot 10^{-29}$ kgm/s
och det hävdar man på kschwabresearch.com
att man i just det fallet "nästan" kan mäta.)

Det är förstås väldigt svårt att mäta hastigheten i en sådan här uppställning rent praktiskt, men i princip fungerar det som i Heisenbergs tankeexperiment som det beskrivs i Feynman kap. 1-8.

2

a) $$\phi(x) = \underbrace{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}}_{\text{kalla detta "N" (för "Normeringskonstant")}} e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$$

Derivera två gånger:

$$\phi'(x) = N \cdot \left(-\frac{m\omega \cdot \overset{\text{kedjeregeln}}{2x}}{2\hbar}\right) e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$$

$$\phi''(x) = N \cdot \left(-\frac{m\omega \cdot 2}{2\hbar}\right) e^{-m\omega x^2/(2\hbar)} \qquad \text{(produkt-regeln)}$$

$$+ N \cdot \left(-\frac{m\omega 2x}{2\hbar}\right)\left(-\frac{m\omega \cdot 2x}{2\hbar}\right) e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$$

$$= \underbrace{N e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}}_{\phi(x) \text{ självt}} \cdot \left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\left(2 - \frac{m\omega \cdot 4x^2}{2\hbar}\right)$$

Schrödingerekvationen (tidsob.) ekv. (23) i formelsaml.

$$\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\phi(x)}_{} = E\phi(x)$$

vänsterledet $\Rightarrow$ $-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) + V(x)\phi(x)$

$\swarrow$ ϕ'' från förra sidan

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\left(2 - \frac{2m\omega x^2}{\hbar}\right)\phi(x)$$

$$+ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \cdot \phi(x)$$

$$= \left(+\frac{\hbar\omega}{4}\left(2 - \frac{2m\omega x^2}{\hbar}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\phi(x)$$

$$= \left(\frac{\hbar\omega}{2} - \cancel{\frac{1}{2}m\omega x^2} + \cancel{\frac{1}{2}m\omega x^2}\right)\phi(x)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\phi(x)$$

dvs. det angivna $\phi(x)$ satisfierar tidsoberoende S.E.
med konstanten $E = \frac{\hbar\omega}{2}$, dvs. energin $\approx \frac{1\cdot 10^{-34}\cdot 10^{12}}{2} \approx 10^{-22}$ J
$\approx 7\cdot 10^{-4}$ eV.

b) tidsber. S.E. $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$ (*)

förenkling av problemet!

ansats: $\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\phi(x)$ för konstant E.

om man stoppar in detta $\psi(x,t)$ i (*)
får man tidsob. S.E. (ovan) för $\phi(x)$.
Alltså är (*) mer "fundamental".

c) Ja: $P \propto |\psi(x,t)|^2 = |e^{-\frac{i}{\hbar}Et}|^2 |\phi(x)|^2 = |\phi(x)|^2$ tidsoberoende.

③

a) rent tillstånd

b)

Två vägar:

$$\langle -S|+T\rangle\langle +T|-S\rangle + \langle -S|-T\rangle\langle -T|-S\rangle \quad (*)$$

om vi använder formel (52) ser vi att $\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$, dvs $|+T\rangle\langle +T| + |-T\rangle\langle -T| = 1$, så $(*)$ är lika med $\langle -S|-S\rangle$, vilket i sin tur enligt (49) är lika med 1.

c)

$$P = |\langle -S|+T\rangle\langle +T|-S\rangle + \langle -S|-T\rangle\langle -T|-S\rangle|^2$$

$$= |1|^2 = 1$$ beror inte alls på ϕ.

d)

5000 P(komma från P till R)

$= 5000 \cdot 1 = 5000.$

e) $5000 \cdot \underbrace{P(\text{komma från P till Q})}_{|\langle +T|-S\rangle|^2 + |\langle -T|-S\rangle|^2} = \underline{\underline{5000}}$

(olika sluttillstånd kan inte interferera, så addera efter kvadreringen)

$$= \left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^2$$

$$= 1 \qquad \text{(trigonometriska ettan)}$$

Vi kan också se det fysikaliskt: T är helt öppen, så vi kan betrakta det som om den inte vore där alls.

f) om tillståndet innan apparaten är $|+S\rangle$: $P = 0$
$|-S\rangle$: $P = 1$

men vi vet inte innan vi preparerar ett rent tillstånd om vi har $|+S\rangle$ eller $|-S\rangle$, så om in-strålen är opolariserad, får vi 0 partiklar med 50% chans och 1 partikel med 50% chans, men slumpen avgör vad det blir, så i praktiken kan vi inte säga någonting med säkerhet om mätresultatet.

(4) Jfr. föreläsning 17/11 2010 för fler detaljer.

a) Bestäm a och b i (16), (17) i formelsamlingen så att $c_1(t=0)=1$, $c_2(t=0)=0$, dvs. 100% kväve upp vid $t=0$:

$$c_1(t=0) = \frac{a}{2}\cdot e^0 + \frac{b}{2}e^0 = \frac{a}{2}+\frac{b}{2} = 1$$

$$c_2(t=0) = \frac{a}{2}\cdot e^0 - \frac{b}{2}e^0 = \frac{a}{2}-\frac{b}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2}+\frac{b}{2} = 1 & (1) \\ \frac{a}{2}-\frac{b}{2} = 0 & \Rightarrow a = b \end{cases}$$

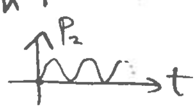
Stoppa in i (1): $\frac{a}{2}+\frac{a}{2} = 1$
$\Rightarrow a = 1$
$\Rightarrow b = 1$

alltså
$$c_1(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$
$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t}\left(e^{+\frac{i}{\hbar}At} + e^{-\frac{i}{\hbar}At}\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t}\cdot 2\cos\frac{At}{\hbar} = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t}\cos\frac{At}{\hbar}$$

Eulers formel
$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$$c_2(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$
$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t}\left(e^{+\frac{i}{\hbar}At} - e^{-\frac{i}{\hbar}At}\right)$$
$$= e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t}\, i\sin\frac{At}{\hbar}$$

$$P(\text{möta kväve ned}) = |c_2(t)|^2 = \overbrace{\left|e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t}\right|^2}^{1}\left|i\sin\frac{At}{\hbar}\right|^2$$
$$= \sin^2\frac{At}{\hbar}$$



$$P\left(t=\frac{\pi\hbar}{4A}\right) = \left(\sin\left(\frac{A}{\hbar}\cdot\frac{\pi\hbar}{4A}\right)\right)^2 = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

b) $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\left(\cos\frac{At}{\hbar}|1\rangle + i\sin\frac{At}{\hbar}|2\rangle\right)$

$$|\psi(t=\tfrac{\pi\hbar}{4A})\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle\right)$$

Vi har $P_1 = |c_1|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 50\%$

$P_2 = |c_2|^2 = \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 = 50\%$

"ser ut" som en blandning av kväve upp och kväve ned

— klassiskt oförståeligt!

(Notera: ser inte ut som NH_3 med kväveatomen någonstans mittemellan, eftersom det bara finns upp och ned. Å andra sidan kan man argumentera att medelvärdet av mätningar av N:s position ger "mittemellan", men det fångar inte hur man skulle tänka sig att det "ser ut".)

Man kan aldrig förutsäga energimätningens resultat om man inte befinner sig i ett stationärt tillstånd, dvs. $|I\rangle$ $(E_I = E_0 + A)$ och $|II\rangle$ $(E_{II} = E_0 - A)$

Här ser vi

$$\langle I|\psi(t=\tfrac{\pi\hbar}{4A})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1| - \langle 2|)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle)$$

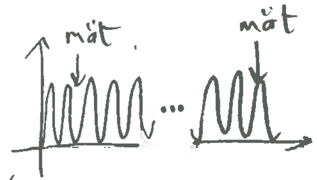
$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}(1-i), \quad \left|\frac{1-i}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}(1-i)(1+i) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}$$

$$\langle II|\psi(t=\tfrac{\pi\hbar}{4A})\rangle = \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}(1+i), \quad \left|\frac{1+i}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Så man kan förutsäga att det är 50% vardera, men inte vad det blir.

c) jfr. Feynman fig 1-5.

Om energimätningen är väldigt långsam jämfört med oscillationshastigheten (som här är ungefär $\frac{\pi\hbar}{A} \approx 10^{-10}$ s i period) så ser mätserien slumpmässig ut och man kan uppfatta



energiskillnaden $E_I - E_{II} = 2A \approx 10^{-4}$ eV som en experimentell onoggrannhet, trots att det rör sig om två tillstånd med olika energier och fullständigt deterministisk tidsutveckling av fördelningen av energimätningar (efter många experiment).

Med andra ord, kvantfysikexperiment bör vara noggranna och ofta snabba!

---

(5) a) om den ena roterar åt ena hållet så roterar den andra åt andra hållet med samma rotationsaxel. Det beror förstås inte på hur man mäter eller huruvida man mäter på den andra: klassisk korrelation.

rörelsemängdsmomentet är bevarat.

b) spinnmätning i y-led och z-led är oförenliga (icke kommuterande observabler) så mätning av y-spinnet förstör information om z-spinnet, trots att det sker efter utskickandet — kvant-korrelation.

c) Nej. (öppen SG = ingenting) [om man separerar med "stopp" (de grå blocken i uppgift 3) är svaret ja.]