

Några lösningsskisser till kompendium 2

(De här lösningarna är detaljerade, ni behöver inte skriva så här mycket om liknande skulle komma på tentan.)

A1.1

En Bernoulliprocess med totala antalet steg N . Låt oss säga att antalet steg åt vänster är n_v och steg till höger är n_h , då är totala förflyttningen åt vänster $L = a(n_v - n_h)$. Använd nu formlerna från kompendiet $\bar{n}_v = Np$ osv (om man tänker efter är det ganska klart att det måste gälla, för man går N steg totalt och sannolikheten att gå åt vänster är p)

$$\bar{L} = \overline{a(n_v - n_h)} = a\bar{n}_v - a\bar{n}_h = aNp - aNq = Na(p - q) \quad (1)$$

$$= 50 \cdot 0,5 \text{ mm} \cdot (0,4 - 0,6) = -5 \text{ mm}. \quad (2)$$

dvs. man hamnar 5 mm åt höger. Eftersom $n_v + n_h = N$ kan L också skrivas $L = a(n_v - (N - n_v)) = a(2n_v - N)$. Variansen är, med formeln från kompendiet $\sigma_{n_v} = \sqrt{Npq}$,

$$\sigma_L^2 = \overline{(L - \bar{L})^2} = \overline{L^2} - \bar{L}^2 = \overline{a^2(2n_v - N)^2} - a^2(2\bar{n}_v - N)^2 \quad (3)$$

$$= a^2(4\overline{n_v^2} - 4N\bar{n}_v + N^2 - 4\bar{n}_v^2 + 4N\bar{n}_v - N^2) \quad (4)$$

$$= a^2(4\overline{n_v^2} - 4\bar{n}_v^2) = 4a^2\sigma_{n_v}^2 = 4a^2Npq, \quad (5)$$

så $\sigma_L = 2a\sqrt{Npq} = 3,5 \text{ mm}$.

A1.2

a) $p = V_1/V = 1/3$. Notera att $q = V_2/V = (V - V_1)/V = 1 - p$ som det skall vara.

b) Binomialfördelning

$$P_N(N_1) = \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!} \left(\frac{V_1}{V}\right)^{N_1} \left(\frac{V_2}{V}\right)^{N - N_1}$$

för $N_1 = N/3 = N_A/3$. Det är ett OK svar i det här kapitlet att ställa upp det här och inte räkna vidare mer.

Men i nästa kapitel använder vi Stirlings approximation. $\ln N! \approx N \ln N - N$. Då är $N! \approx N^N e^{-N}$ och vi kan göra en approximativ uträkning. Stoppar vi in det får vi (egentligen är $N = N_A$ men vi behöver bara veta att det är stort för att göra den här uträkningen):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(N/3) &\approx \frac{N^N e^{-N}}{(N/3)^{N/3} e^{-N/3} (2N/3)^{2N/3} e^{-2N/3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{N/3} \left(\frac{2}{3}\right)^{2N/3} \\ &= N^{N - N/3 - 2N/3} e^{-N + N/3 + 2N/3} 3^{N/3 + 2N/3} 2^{-2N/3} \cdot 3^{-N/3 - 2N/3} 2^{2N/3} \\ &= N^0 \cdot e^0 \cdot 3^0 \cdot 2^0 = 1 \end{aligned} \quad (6)$$

Det är alltså enligt den här uträkningen i princip "helt säkert" (100% chans) att molekylerna skall vara uppdelade *precis* efter volymsförhållandena. Men det här är en första approximation, man kan också använda den "mer noggranna" versionen av Stirlings approximation och få någon liten avvikelse (överkurs!).

c) Medelvärdena är $\overline{N}_1 = pN = (V_1/V)N = N/3$ och $\overline{N}_2 = qN = (V_2/V)N = 2N/3$.

d) Relativa bredder

$$\frac{\sigma_1}{\overline{N}_1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{N}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

dvs. mycket liten relativ bredd. Det var egentligen det vi såg i uppgift b, att det är väldigt sannolikt att hamna precis på medelvärdet. Vi ser också här att det inte är exakt 100% sannolikt, om man skall vara noggrann, för då vore relativa bredden exakt noll.

A1.4

Skriv upp de $2^5 = 32$ utfallen som + + + + +, + + + + -, osv. Det finns två utfall där alla rör sig åt samma håll: + + + + + och - - - - -. Vi vet att

$$p(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}, \quad (7)$$

och sannolikheten att en partikel är på väg åt positiva x -hållet är

$$\int_0^\infty dv_x p(v_x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dv_x p(v_x) = \frac{1}{2} \quad (8)$$

Det är sannolikheten $1/2$ i varje riktning, så totalt $(1/2)^5 = 1/32$. (Man hade inte behövt räkna alls om man bara argumenterar att fördelningen är symmetrisk kring noll.) Vi får alltså $2 \cdot 1/32 = 1/16$.

A1.5

a) Mät arean i figuren, t.ex. approximera som en rektangel med bredd 2 och höjd 0,25 (area $2 \cdot 0,25 = 0,5$), och en liksidig triangel med bredd 2 och höjd 0,15 (area $2 \cdot 0,15/2 = 0,15$) vilket ger $0,5 + 0,15 = 0,65 = 65\%$, tillräckligt bra. b) $\sqrt{N_2/N_1} \approx 5$, så $N_2/N_1 \approx 25$. c) Om t.ex. undersökarna inte ringer oberoende personer (t.ex. några får reda på att de skall bli telefonintervjuade och bildar en facebookgrupp och bestämmer vad de skall svara) så är det inte representativt för hela samhället.

A1.6

a) $\sigma = \sqrt{k_B T/m}$, så $m = \sigma^2/(k_B T)$ med $\sigma = 100$ m/s. b) Det räcker att svara i kg, man behöver inte konvertera till u eller g/mol. c) Normalfördelning är för oberoende partiklar.

A1.7

a) För att mellanstegen inte skall se onödigt trassliga ut skriver vi inte ut konstanterna i Maxwellfördelningen utan vi skriver $p(v_x) \rightarrow e^{-v_x^2}$, då blir det så här:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx v_x e^{-v_x^2} = -\frac{1}{2} [e^{-v_x^2}]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Funktionen är udda, så integralen är noll. (Notera att med integralen över $p(v_x)$ utan v_x fanns det ingen primitiv funktion och då fick vi hålla på och trassla med olika trick, men när det frågas efter integralen med v_x framför $p(v_x)$ så finns det en primitiv funktion, för

$$\frac{d}{dx} e^{-v_x^2} = -2v_x e^{-v_x^2}$$

enligt kedjeregeln.)

b) Både medelvärdet av $|v_x|$ och medelvärdet av $|\mathbf{v}|$ är intressanta, låt oss betrakta den enklare $|v_x|$ här. Vi vet att $|v_x| = v_x$ för positiv hastighet och $|v_x| = -v_x$ för negativ hastighet, så vi kan lägga ihop integralen från $-\infty$ till 0 och den från 0 till ∞ och få två gånger den ena av dem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |v_x| e^{-v_x^2} = 2 \int_0^{\infty} dx v_x e^{-v_x^2} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) [e^{-v_x^2}]_0^{\infty} = -1(e^{-\infty} - e^0) = 1$$

Nu blev det inte noll. Gör sedan om det med konstanterna i behåll. Det första parentesen i $p(v_x)$ är en konstant som man kan ta ut ur integralen, och sedan gör man variabelsubstitution $mv_x^2/(2k_B T) = x$. Svaret blir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |v_x| p(v_x) = \sqrt{\frac{2k_B T}{\pi m}}.$$

För att få ut ett värde måste vi veta partiklarnas massa. Är inget annat givet så antag t.ex. syrgas (O_2), $m = 5,31 \cdot 10^{-26}$ kg enligt exemplet i kapitel 1. Notera att siffervärdet på den här medelfarten för syrgas vid rumstemperatur blir betydligt mindre än exemplet i texten (runt hälften) eftersom det här är den förenklade situationen med en dimension.

c) antal träffar = $(1/2)A \cdot \bar{v}_x \cdot dt \cdot (N/V)$ enligt kinetiska teorin. Ideal gas $PV = Nk_B T$ så partikeldensiteten är $N/V = P/(k_B T)$. Antag t.ex. en kvadratmeter vägg, $A = 1 \text{ m}^2$, och det var givet tidsintervallet $dt = 1 \text{ s}$. Med syrgas blir det $1,4 \cdot 10^{27}$ träffar på en kvadratmeter på en sekund. Det är inte konstigt att vi i makroskopiska mätningar inte hinner mäta att trycket ändras mellan träffarna, utan det experimentella medelvärdet vi får blir ytterst nära det teoretiska medelvärdet.

A2.2

Energien är specificerad i termer av $\hbar\omega$, så vi kan lika gärna ställa frågan, hur många kombinationer av fyra tal av formen "heltal+1/2" finns med summan mindre eller lika

med 4? Notera att halvorna också summeras till 2, så heltalen måste summera till max 2. Mikrotillstånden för åtskiljbara partiklar är 15 stycken:

n_1	0	1	0	0	0	2	0	0	0	1	1	1	0	0	0
n_2	0	0	1	0	0	0	2	0	0	1	0	0	1	1	0
n_3	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	1	0	1	0	1
n_4	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	1	0	1	1

de här
de här
de här

men är de identiska är de markerade samma tillstånd, det ger 4 st.

A2.3

Ta F som vi räknat ut i kompendiet och derivera med avseende på N :

$$\mu = -k_B T \ln \left(\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right)$$

Stor (mindre negativ) kemisk potential motsvarar tydligen stor densitet N/V . Prova gärna att stoppa in siffror för t.ex. 1 mol helium vid rumstemperatur, har du någon känsla för värdet på μ kan bli? Och enhet?

A2.4

Tillståndssumman blir

$$\mathcal{Z}_1 = \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n+1/2)} = e^{-\beta \hbar \omega / 2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \beta \hbar \omega} = e^{-\beta \hbar \omega / 2} (1 + x + x^2 + \dots) \quad (9)$$

där $x = e^{-\beta \hbar \omega}$. Det här är en geometrisk serie som var angiven som

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (10)$$

så

$$\mathcal{Z}_1 = \frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \quad (11)$$

Fria energin för en partikel är

$$A_1 = -k_B T \ln \mathcal{Z}_1 = \frac{1}{2} \hbar \omega + k_B T \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \quad (12)$$

och medelenergin för en partikel är

$$\overline{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z}_1 = \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \right) \quad (13)$$

För N stycken blir det helt enkelt $\overline{E} = N\overline{E}_1$. För $3N$ stycken får man $\overline{E} = 3N\overline{E}_1$. För $T \rightarrow \infty$, alltså $\beta \rightarrow 0$, får man $\overline{E}_1 \rightarrow 3N/\beta = 3Nk_B T$, så $C_V \rightarrow 3Nk_B$ som i Dulong-Petits lag i kompendiet. För temperaturer T som inte är så höga avviker C_V från konstant värmekapacitet (för fasta ämnen). Einsteinmodellen lyckas alltså beskriva både Dulong-Petits lag och avvikelser från den för låg temperatur. Det står mer om det här i kap.3. (Särskilt i ämnen som diamant är avvikelserna från konstant värmekapacitet tydliga.)

A3.1

Sannolikhetstätheten är

$$p(z) = \frac{e^{-\beta E(z)}}{Z} \quad (14)$$

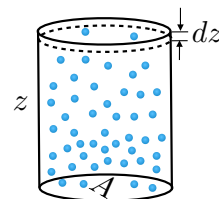
för lägesenergin $E(z) = mgz$ som funktion av höjden över havsytan z , där tillståndssumman är

$$Z = \int_0^\infty e^{-\beta mgz} dz = -\frac{1}{\beta mg} [e^{-\beta mgz}]_0^\infty = \frac{1}{\beta mg} \quad (15)$$

så

$$p(z) = \frac{e^{-\beta mgz}}{\frac{1}{\beta mg}} = \beta mg e^{-\beta mgz} = \frac{mg}{kT} e^{-mgz/(kT)}. \quad (16)$$

Det här är sannolikhetstäthet per längdenhet (mg är som bekant newton och kT är newtonmeter) i höjddled. Tänk dig en cylinder med area A som bas och liten cylinderhöjd dz , som i figuren till höger, med volym $dV = A dz$. Den innehåller $dN = p(z)dz$ partiklar, och för tillräckligt litet dz är partikeldensiteten $\rho = dN/dV$ i cylindern ungefär konstant, låt oss kalla densiteten vid markhöjd ρ_0 . Går vi högre upp sjunker partikelantalet, och därmed densiteten:



$$\rho(z) = \frac{dN}{dV} = \frac{p(z)dz}{A dz} = \frac{p(z)}{A} = \frac{mg}{AkT} e^{-mgz/(kT)} =: \rho_0 e^{-mgz/(kT)}. \quad (17)$$

Enligt $PV = NkT$ är $P = \rho kT$, dvs. trycket är proportionellt mot partikeldensiteten ρ :

$$P(z) = P_0 e^{-mgz/(kT)} \quad (18)$$

Övergångshöjden då vi gått ned till en e -del av partiklarna är $z_0 = kT/(mg)$, för syre vid rumstemperatur är det runt en mil höjd. Luften ovanför det är tydligen ganska tunn, efter vid en viss höjd slutar allmänna gaslagen att gälla trots att densiteten är låg, för att det blir väldigt långt mellan partiklarna, s.k. *rarefied gas*, som omnämns i Cengel & Boles.

Det här exemplet är utgångspunkt i [Vol I, kap. 40](#) av Feynman Lectures. Det är också relevant av historiska skäl för att Perrin, som gjorde experimenten som följde upp Einsteins idé om att mäta Avogadros tal, använde höjd-distribution av partiklar som kalibrering.

A3.2

Från exemplet har vi tillståndssumman

$$Z = \sum_{\{n_p\}} e^{-\beta \sum_p n_p \epsilon_p} = e^{-\beta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)} + e^{-\beta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_4)} + e^{-\beta(\epsilon_1 + \epsilon_3 + \epsilon_4)} + e^{-\beta(\epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)}. \quad (19)$$

De tillstånd som har någon partikel i mikrotillstånd 1 är de tre första, så det sista bidrar inte:

$$\bar{n}_1 = \frac{1 \cdot e^{-\beta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)} + 1 \cdot e^{-\beta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_4)} + 1 \cdot e^{-\beta(\epsilon_1 + \epsilon_3 + \epsilon_4)} + 0 \cdot e^{-\beta(\epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)}}{Z} \quad (20)$$

Man kan snygga till lite genom att förlänga med $e^{\beta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)}$:

$$\bar{n}_1 = \frac{e^{\beta\epsilon_2} + e^{\beta\epsilon_3} + e^{\beta\epsilon_4}}{e^{\beta\epsilon_1} + e^{\beta\epsilon_2} + e^{\beta\epsilon_3} + e^{\beta\epsilon_4}} \quad (21)$$

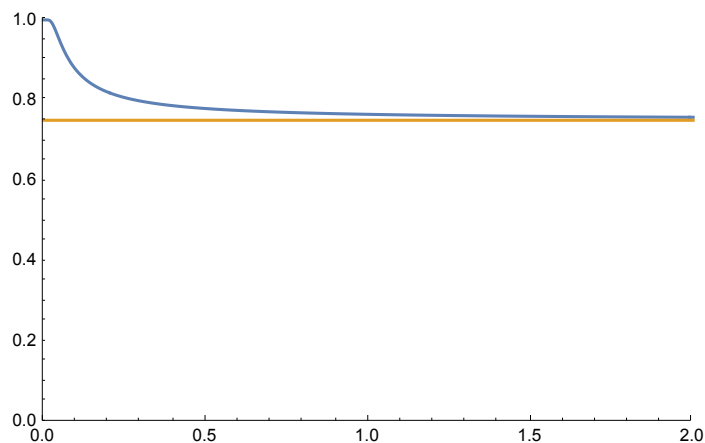
men det är valfritt. Vi kan göra en grov skiss av \bar{n}_1 som funktion av temperaturen utan att veta så mycket om energierna, bara vi studerar extremfallen stor och liten temperatur. Medelvärde \bar{n}_1 går mot $3/4$ för stort T ($\beta \rightarrow 0$):

$$\bar{n}_1 \rightarrow \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1 + 1 + 1} = \frac{3}{4}. \quad (22)$$

För litet T är det exponentialfunktionen av den största energin som dominerar, och den energin är den 4:e, för vi har ordnat dem från ϵ_1 (minst) till ϵ_4 (störst):

$$\bar{n}_1 \rightarrow \frac{e^{\beta\epsilon_4}}{e^{\beta\epsilon_4}} = 1. \quad (23)$$

Antar vi t.ex. $\epsilon_1 = 1$ meV, $\epsilon_2 = 2$ meV, $\epsilon_3 = 3$ meV, $\epsilon_4 = 4$ meV, och $k_B T = 25$ meV (vilken temperatur motsvarar det?) så blir plotten



Men enligt ovanstående är det viktigaste inte detaljerna i den här plotten, bara att det är någon glatt funktion som interpolerar mellan 1 och 3/4, ändrar du energierna lite är det kvalitativa uppförandet detsamma. Viktigare är: kan du argumentera i ord varför det borde bli 1 och 3/4?

A3.3

Partiklarna är identiska, men när man räknar besättningstal är det som att fördela tre energibitar i 3 *åtskiljbara* (!) tillstånd (jfr. Einsteins fasta ämne i mikrokanoniska ensembler) så det blir

$$\frac{(3+3-1)}{3!(3-1)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \quad (24)$$

tillstånd. Vi ser också det om vi provar:

mikrotillstånd p	n_0	n_Δ	$n_{2\Delta}$	E_p
1	3	0	0	0
2	0	3	0	3Δ
3	0	0	3	6Δ
4	2	1	0	Δ
5	2	0	1	2Δ
6	0	2	1	4Δ
7	1	2	0	2Δ
8	0	1	2	5Δ
9	1	0	2	4Δ
10	1	1	1	3Δ

Notera att det inte spelar någon roll hur jag numrerade dem, i synnerhet måste de inte vara i ordning av ökande energi (fast det är ibland praktiskt). Det är i alla fall ett tillstånd med energi noll, ett med energi Δ , två med energi 2Δ osv, så tillståndssumman blir

$$Z = 1 + e^{-\beta\Delta} + 2e^{-2\beta\Delta} + 2e^{-3\beta\Delta} + 2e^{-4\beta\Delta} + e^{-5\beta\Delta} + e^{-6\beta\Delta} \quad (25)$$

och vi får

$$\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z \quad (26)$$

$$= \frac{\Delta}{Z} \left(e^{-\beta\Delta} + 4e^{-2\beta\Delta} + 6e^{-3\beta\Delta} + 8e^{-4\beta\Delta} + 5e^{-5\beta\Delta} + 6e^{-6\beta\Delta} \right) . \quad (27)$$

A3.4

Det vi är mer vana vid är åtskiljbara partiklar (D för “distinguishable”):

$$Z_D = Z_1^2 = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \quad (28)$$

där $x = \beta\hbar\omega$, så tillståndssumman för fermioner är

$$Z_F = \frac{1}{2} \left(Z_D - e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-2x})^n \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-2x}} \right) \quad (29)$$

där jag har dragit av tillståndssumman över partiklarna i *samma* mikrotillstånd ($E = 2\hbar\omega(n + 1/2)$), som är förbjudet för fermioner. För identiska bosoner skall vi lägga till det tillståndet, så det blir samma uttryck med ett plustecken emellan:

$$Z_B = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} + \frac{e^{-x}}{1 - e^{-2x}} \right) \quad (30)$$

Nu kan man ganska direkt räkna ut medelvärdet från

$$\bar{E} = \frac{\partial(\beta F)}{\partial\beta} \quad (31)$$

och entropin S från

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial(kT \ln Z)}{\partial T} = k \ln Z + kT \frac{\partial(\ln Z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial T} = k \ln Z - k \frac{\partial(\ln Z)}{\partial x} \frac{\hbar\omega}{kT}. \quad (32)$$

Man kan omforma med hjälp av konjugatregeln $(y + 1)(y - 1) = y^2 - 1$:

$$\frac{a}{e^x - 1} - \frac{b}{e^x + 1} = \frac{a(e^x + 1) - b(e^x - 1)}{e^{2x} - 1} \quad (33)$$

men som vanligt är alla korrekta uttryck OK som svar. Jämför också videon om kvantgaser.

A3.5

Att göra det i allmänhet kan vi betrakta som överkurs, men som det stod i Ledningen kan man i alla fall försöka, för t.ex. $N = 3$. Svårigheten är alltså att vi har ett oändligt antal möjliga tillstånd, så vi måste i princip specificera ett oändligt antal besättningstal: $\{n_1, n_2, n_3, n_4, \dots\}$. Vi kan börja skriva upp några exempel på möjliga tillstånd i ensemblen: $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, \dots\} = \{1, 1, 1, 0, 0, \dots\}$ är ett möjligt tillstånd för tre fermioner, ett annat är om vi flyttar upp den tredje till nästa tillstånd $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, \dots\} = \{1, 1, 0, 1, 0, \dots\}$ osv. Tillståndssumman blir

$$Z = \sum e^{-\beta E_n} = e^{-\beta(1+2+3)\Delta} + e^{-\beta(1+2+4)\Delta} + e^{-\beta(1+2+5)\Delta} + \dots \quad (34)$$

(där jag inte har specificerat hur man får alla termerna i + ...) och skriv $x = e^{-\beta\Delta}$ för att se skogen för träden:

$$Z = x^{1+2+3} + x^{1+2+4} + x^{1+2+5} + \dots \quad (35)$$

Vi har tydligen ett rent matematiskt (talteoretiskt, skulle man kunna säga) problem att räkna hur man kan lägga ihop tre heltal på olika sätt. Att lösa det fullständigt är som sagt lite överkurs, men man borde kunna försöka något i alla fall. Enklaste försöket att approximera (trunkera) summan någonstans, för ju högre energi, desto mindre bidrag till sannolikheterna enligt Boltzmann ($x = e^{-\beta\Delta} < 1$ om $\Delta > 0$), så den största termen är $x^{1+2+3} = x^6$. Då blir medelenergin $\bar{E} = -\partial/\partial\beta \ln Z \approx -(\partial x/\partial\beta)\partial/\partial x \ln x^6 = +\Delta \cdot x \cdot (6/x) = 6\Delta$, som helt enkelt är energin för det mest sannolika tillståndet $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, \dots\} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots\}$. För N fermioner ger den approximationen alltså $\bar{E} \approx (1 + 2 + 3 + \dots + N)\Delta$. Är man nu lite matematiskt lagd kan man tycka att det är kul att försöka bevisa följande fina uttryck för summan av heltal:

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2} \quad (36)$$

ett s.k. [triangeltal](#), som mycket riktigt ger $3(3+1)/2 = 6$ för $N = 3$. Men $\bar{E} \approx (1 + 2 + 3 + \dots + N)\Delta$ är också ett acceptabelt svar.

Nästa nivå av approximation vore att använda geometrisk serie $\sum x^n = 1/(1-x)$ för att få med åtminstone alla termer av typen ovan när vi bara flyttar upp en fermion ett tillstånd i taget:

$$Z = \sum e^{-\beta E_n} = x^{(1+2)}(x^3 + x^4 + \dots) + \dots = x^3 \left(\frac{1}{1-x} - (1+x+x^2) \right) + \dots \quad (37)$$

Då får vi $\bar{E} \approx \Delta \cdot x \cdot \partial/\partial x \ln Z = +\Delta \cdot x \cdot (6-5x)/(x-x^2) = \Delta \cdot (6-5x)/(1-x)$. Det ser inte så lätt-tolkat ut, men taylorutvecklar vi det får vi $\bar{E} \approx (6+x+\dots)\Delta$, så vi lär oss att medelenergin är lite större än $\bar{E} \approx 6\Delta$ som vi fick i enklaste approximationen, som verkar rimligt eftersom alla tillstånd har högre energi än det mest sannolika! Är du intresserad av hur man löser problemet mer allmänt behöver du lite bättre verktyg, så kom gärna och fråga, men gör allt annat först!

A3.6

Se G& T. kap. 5.7.

$$Z_1 = e^{\beta\mu B_{\text{eff}}} + e^{-\beta\mu B_{\text{eff}}} = 2 \cosh(\beta\mu B_{\text{eff}}) \quad (38)$$

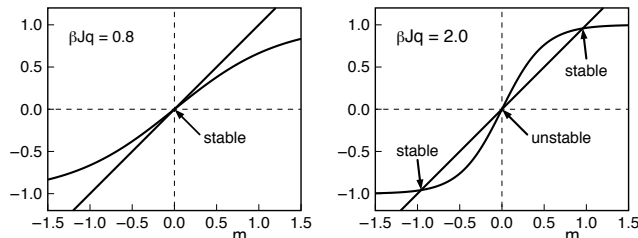
$$f = -kT \ln Z_1 = -kT \ln(2 \cosh(\beta\mu B_{\text{eff}})) \quad (39)$$

$$m = -\frac{\partial f}{\partial B} = kT \frac{1}{2 \cosh(\beta\mu B_{\text{eff}})} \cdot 2 \sinh(\beta\mu B_{\text{eff}}) \cdot \beta \quad (40)$$

där jag tog med inre derivatan i sista steget (man kan stoppa in uttrycket för μB_{eff} så ser man att man kan derivera m.a.p. μB_{eff} lika väl som B), så vi får en implicit ekvation

$$m = \tanh \frac{2Jm + B}{kT} \quad (41)$$

Kan lösas grafiskt som i fig. 13 i G&T kap. 5.7: (för oss $q = 2$)



Över kritiska temperaturen flukturerar spinnen (dvs. “hoppa” ganska slumpmässigt fram och tillbaka mellan upp och ned), för det finns gott om termisk energi att ta från reservoaren, då är magnetiseringen noll. Under kritiska temperaturen “fryser de fast”, antingen upp eller ner, de får *spontan* en magnetisering. (Vi har egentligen inte visat att det måste vara så, för omagnetiserade tillståndet $m = 0$ finns som alternativ lösning även under kritiska temperaturen. Men den lösningen visar sig ha högre fri energi F än det magnetiska, så systemet “föredrar” att vara magnetiserat under kritiska temperaturen, fast det gick vi inte in på här.)

Det här är ett exempel på spontan symmetribrott, och ledde till idén om Higgs-mekanismen i partikelfysik. Den här metoden kallas medelfältsmetoden (*mean field theory*) och ger hyfsade men inte perfekta resultat för gitter i högre dimensioner med olika antal närmaste grannar q kring vårt spinn, som du ser om du läser vidare i G&T kap. 5.7:

lattice	d	q	T_{mf}/T_c
square	2	4	1.763
hexagonal	2	6	1.648
diamond	3	4	1.479
simple cubic	3	6	1.330
bcc	3	8	1.260
fcc	3	12	1.225

A3.7

Fermitrycket är

$$P = \frac{2}{5} \rho \epsilon_F \quad (42)$$

men ρ här är partikeldensiteten (partiklar per kubikmeter), inte massdensiteten ρ_m (kilogram per kubikmeter). Man kan konvertera om man slår upp neutronmassan:

$$\rho = \frac{1}{m} \rho_m = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{-27} \text{ kg/partikel}} \cdot 10^{18} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 6 \cdot 10^{44} \text{ partiklar/m}^3 \quad (43)$$

så Fermi-energin blir

$$\epsilon_F = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \rho^{2/3} \approx 2 \cdot 10^{-11} \text{ J} \quad (44)$$

så trycket är ungefär

$$P \approx 5 \cdot 10^{33} \text{ Pa} . \quad (45)$$

Det här är bara en uppskattning; i själva verket varierar trycket över någon storleksordning från ytan till centrum. Man kan formulera det som att kraften per kvadratmillimeter är

$$F = PA = 5 \cdot 10^{33} \text{ Pa} \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{mm}^2 = 5 \cdot 10^{27} \text{ N/mm}^2 \quad (46)$$

dvs. ofattbart stort. Man brukar säga att en tändsticksask med neutronstjärnematerial skulle väga som en kubikkilometer sten på Jorden (kolla gärna att det stämmer!).

Om du tycker sådant här är intressant så titta på G&T uppgift 2.54 om [Bekenstein-Hawking-entropin](#) $S_{\text{BH}} = k_B A / (4\ell_P^2)$ för ett svart hål. Egentligen behöver man kvantfältteori för att göra om Hawkings uträkning, men de gör några grova uppskattningar.

A3.8

Se G&T och tentalösningen.

A3.8

Det är flera tentauppgifter som relaterar till de här fyra uträkningarna (U , F , S , P). Det är precis samma princip som vi övat på många gånger nu, förutom att du kanske inte blivit riktigt varm i kläderna än med övergången från diskreta variabler som p och n till kontinuerliga som energin ϵ . Vet du inte hur du skall börja ens så gör uppgift 3 på tenta 2015-10-23 först, som handlar om energin U . Vi får fria energin F från tillståndssumman \mathcal{Z} i kompendiet ekvation (6.33), eller från Physics Handbook:

$$F = -k_B T \ln \mathcal{Z} = -k_B T \ln \prod_{p=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_p}} = +k_B T \sum_{p=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_p}) \quad (47)$$

för att logaritmen av produkten är summan av logaritmerna: $\ln xy = \ln x + \ln y$. För att kunna räkna heltals-tillstånd $p = 1, 2, 3, \dots$ behövde vi inte fundera på hur nära tillstånden ligger varandra. För att gå över till kontinuerlig variabel ϵ måste vi ersätta $\sum(\dots) \rightarrow \int(\dots)g(\epsilon)d\epsilon$, där tillståndstätheten $g(\epsilon) = V\epsilon^2/(\pi^2\hbar^2c^3)$ för fotoner (se diskussionen om fotongas i kompendium 2). Fria energin blir en integral:

$$F = k_B T \int_0^{\infty} g(\epsilon) \ln(1 - e^{-\beta \epsilon}) d\epsilon \quad (48)$$

Kombinationen $\beta \epsilon = \beta h \nu = h \nu / (k_B T)$ förekommer, så kalla den x och byt integrationsvariabel till den:

$$F = \frac{V(k_B T^4)}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^{\infty} x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx \quad (49)$$

Det finns många sätt att utföra integralen, t.ex. partiell integration:

$$\int x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx = - \int \frac{x^3 - (-e^{-x})}{3(1 - e^{-x})} dx \quad (50)$$

Varför försvann termen $[\frac{x^3}{3} \ln(1 - e^{-x})]_0^\infty$? (Prova gärna också med Taylorutvecklingen av logaritmen innanför integraltecknet!). Integralen $\int x^3/(e^x - 1) dx = \pi^4/15$ står i Physics Handbook (och var t.ex. given på tentan 2015-10-23), så skriv om till den genom att förlänga i integranden, och det ger $F = -4\sigma/(3c)VT^4$ med Stefan-Boltzmanns konstant $\sigma = 2\pi^5 k_B^4/(15h^3 c^2)$ som det står i Physics Handbook.

Från fria energin F så får vi sedan enkelt fram S och P .

En sak som kan vara förvirrande är att vi använde stora kanoniska ensemblen (\mathcal{Z} , inte Z), och därmed egentligen har räknat ut Landau-potentialen Ξ (se början av kap.6 i kompendium 2). Men om $\mu = 0$ så är $\Xi = F$, som vi redan använde i kap.6. (I allmänhet är $\Xi = F - G$ och $G = \mu N$, se G& T kap.2 för fördjupning om Landau-potentialen; vi har inte pratat så mycket om Gibbs fria energi G , som är särskilt relevant i kemi och därför kom i senare kapitel i Cengel & Boles som vi inte kommer till på just den här kursen.)

A3.10

Extra-överkurs, se Polchinskis bok i strängteori volym 1.

a) Det finns $n_{\text{pol}} = 2$ polariseringar i $d = 4$ (t.ex. vänster-cirkulärpolariserat och höger-cirkulärpolariserat), så man kan gissa $n_{\text{pol}} = d - 2$.

b) Räkningen är nästan densamma som den för fotongas, men nu är besättningstalen n_p för oscillationstillstånd hos strängen, och nu har vi dessutom en produkt av n_{pol} sådana faktorer som vi hade tillståndssumman för fotongas.

c) Det förekommer en faktor $q^{1/24}$ i [Dedekinds eta-funktion](#), så eftersom $(q^{1/24})^{n_{\text{pol}}} = q^{n_{\text{pol}}/24}$ måste man minst ha $n_{\text{pol}} = 24$ för att få heltalsexponent, vilket enligt deluppgift a leder till $d = 26$, så bosonisk strängteori "vill" vara i 26 rumtidsdimensioner, alltså 25 rumdimensioner och 1 tidsdimension. Som tur är finns mer seriösa sätt att räkna ut det här på! Strominger och Vafa använde strängteori för att räkna ut $S_{\text{BH}} = k_B A/(4\ell_P^2)$ ovan från att räkna mikroskopiska tillstånd ([Breakthrough Prize 2017](#)).