

Anteckningar om MRI, v0.6

1 Referenser

Bok: "MRI from Picture to Proton" [1]. Doole. Sajter: MRI-questions [2], What is NMR [3]. Mer avancerad bok: Brown [4].

2 Grundkunskaper

Här är en kort lista på grundkunskaper som kan vara bra.

- Läge i anatomi. Medianplanet (även känt som sagittalplanet, från ordet för pil, alltså pil utmed planet är riktning man går i): vänster och höger. Frontalplanet (*coronal* plane): främre och bakre del.

3 Spinn och kvantbitar

Se först min video [Spinn och kvantbitar](#). Det allmänna tillståndet hos ett spinn är en superposition av spinn-upp och spinn-ned: Susskind [5] skriver

$$|A\rangle = \alpha_u|u\rangle + \alpha_d|d\rangle$$

där α_u och α_d får vara komplexa tal (varför? Susskind uppgift 2.3) som uppfyller $|\alpha_u|^2 + |\alpha_d|^2 = 1$ (totala sannolikheten måste vara 100%) och fasmultiplikation $\alpha_u \rightarrow e^{i\theta}\alpha_u$, $\alpha_d \rightarrow e^{i\theta}\alpha_d$ med samma reella θ är redundant (ger samma mätbara storheter, Susskind förklarar det i kap.2.3). Så från två komplexa parametrar α_u, α_d , alltså fyra reella, minus två reella villkor, blir det två reella fria parametrar kvar. De är dessutom periodiska (varför? Skriv ut $|\alpha_u|^2 + |\alpha_d|^2 = 1$ i realdelar och imaginärdelar och föreställ dig det geometriskt) och kan representeras som två vinklar (θ, ϕ): Bloch-sfären. Som diskuteras på dess [Wikipedia-sida](#), eller uppgift 3.4 i Susskind, är relationen till standardparametriseringen av en sfär (θ, ϕ)

$$\alpha_u = \cos \frac{\theta}{2}, \quad \alpha_d = e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Man måste komma ihåg var parametrarna kom ifrån för att förstå Bloch-sfären: *klassiska* basvektorer upp och ned pekar ju utefter *samma axel* i rummet, så man kan inte uttrycka en allmän riktning i rummet i dem. Men en punkt (θ, ϕ) på en sfär kan representera vilken riktning som helst i rummet. Enhetsvektorn i riktning (θ, ϕ) kallas i det här sammanhangen ibland Bloch-vektorn. Tillstånd som pekar "vänster" och "höger" eller "in" och "ut" kan alltså även de representeras på Bloch-sfären, trots att bastillstånden upp och ned inte skulle tillåta det för klassiska vektorer, och det är alltså för att tillståndet $|A\rangle$ har två fria (reella) parametrar.

Vad hade det här att göra med protonerna i en patient i MRI? Som ett tankeexperiment, låt oss tänka att vi kan "stanna" ett visst protonspinn och mäta det upprepade gånger, så vi har medelvärdena $\langle\sigma_x\rangle$, $\langle\sigma_y\rangle$ och $\langle\sigma_z\rangle$, och rita en vektor $\langle\vec{\sigma}\rangle = (\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle, \langle\sigma_z\rangle)$ som representerar dem. Varför "är" inte $\langle\vec{\sigma}\rangle$ spinnet? Gör vi flera mätningar får vi bara den information som är tillåten enligt obestämdhetsrelationen för spinn, t.ex. om vi mäter $\langle\sigma_z\rangle = 1$ så kommer vi i och för sig mäta medelvärdena $\langle\sigma_x\rangle = 0$, $\langle\sigma_y\rangle = 0$, men de två senare är resultat av flera mätningar, där varje enskild mätning givit ± 1 (och lika ofta), aldrig 0. Att säga att mätstorheten σ_x (utan medelvärde) då "är" noll är som att säga att när man singlar slant en gång får man "mittemellan krona och klave", som är meningslöst. Så ritar vi vektorn $\langle\vec{\sigma}\rangle$ så är det bara just medelvärdet den representerar.

Som Susskind visar i kap. 4.11 är rörelseekvationerna för medelvärdena $\langle\sigma_x\rangle$, $\langle\sigma_y\rangle$ och $\langle\sigma_z\rangle$ för ett spinn exakt samma som dem för en klassisk kompassnål i magnetfält (ovanförprick = d/dt , $\mathbf{B} =$

$B_z \mathbf{k}$):

$$\begin{aligned}\dot{\langle \sigma_x \rangle} &= -\omega \langle \sigma_y \rangle \\ \dot{\langle \sigma_y \rangle} &= \omega \langle \sigma_x \rangle \\ \dot{\langle \sigma_z \rangle} &= 0\end{aligned}$$

Det är snyggt att kombinera de två första ekvationerna till en komplex ekvation för medelvärdet av $\sigma_{xy} = \sigma_x + i\sigma_y$. **Övning:** gör det och se varför det är snyggt. Tänk efter utifrån Susskind, vad är uttryckt i B ? (Svar: se sektion 8.2 nedan.)

Medelvärdet för många *oberoende* spinn (viktigt antagande!) är bara medelvärdena för vart och ett ihopadderade. Eftersom vi har ett fält B_0 som bestämmer z -riktning, kan vi välja det för alla protonspinn. Det som skiljer de olika spinnen i populationen åt är initialvärdena för $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \sigma_y \rangle$ och $\langle \sigma_z \rangle$ vid $t = 0$. Tänker vi på en punkt på Bloch-sfären så är vinkeln ϕ i sidled inte så viktig, medan polära vinkeln θ ger spinn-tillståndets energi.

Några referenser nedan citerar Feynman-Vernon-Hellrath [9] för varför tillståndet uppför sig som på Bloch-sfären, men deras parametrisering går tillbaka till Poincaré, som jag försöker förklara i videon. I bägge fallen är vektorn inte en vektor i rummet utan i tillståndsrummet.¹ Det är också en lång diskussion i Brown kap. 5.4.

4 Blochs ekvationer

Ekvationerna i Susskind 4.11 är för ett enskilt spinn. Dessutom är för varje komponent $s_z = \sigma_z \hbar/2$ där $\sigma_z = \pm 1$ är enhetslös.

I Blochs artikel *Nuclear Induction* från 1946 [6] (nobelpris i fysik 1952), med en artikel direkt efter där ett experiment om det beskrivs, skriver han makroskopiska ekvationer för magnetiseringen $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$, alltså medelvärdet av spinnen, $\mathbf{M} = \langle \sum_i \mathbf{s}_i \rangle$. Det är **Bloch-ekvationerna**:

$$\begin{pmatrix} \dot{M}_x \\ \dot{M}_y \\ \dot{M}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_2} & \gamma B_z & -\gamma B_y \\ -\gamma B_z & -\frac{1}{T_2} & \gamma B_x \\ \gamma B_y & -\gamma B_x & -\frac{1}{T_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_0}{T_1} \end{pmatrix} \quad (1)$$

där \mathbf{B} i allmänhet kan vara tidsberoende, γ är gyromagnetiska förhållandet (se sektion 8.3 nedan), M_0 är jämviktsvärdet som M_z närmar sig genom termiska störningar. Bloch inför de två fenomenologiska parametrarna T_1 (termisk eller longitudinell relaxationstid) och T_2 (transvers relaxationstid). Vi ser i ekvationen att T_1 parametrerar hur länge det tar för M_z att återvända till det jämviktsvärdet om det kommit bort från det. Han ger ingen detaljerad uppskattning av T_1 förutom att det kan vara så långt som "sekunder eller timmar" för $B = 10^{-4}$ T. Mer om T_2 och mikroskopisk modell nedan.

I Blochs artikel tänker han sig först fältet B_1 som att det är linjärpolariserat utmed x -axeln. I böcker som [4] (kap 3.2) inför de först ett roterande fält i xy -planet och går sedan till ett medroterande koordinatsystem då B_1 pekar utmed x -axeln. **Övning:** Sätt först $B_z = B_0$, $B_x = 0$, $B_y = 0$, $T_1 \rightarrow \infty$, $T_2 \rightarrow \infty$, och jämför med rörelseekvationerna för ett spinn ovan. Genom att bara byta namn på axlarna i de ekvationerna, kan du sedan direkt se relationen med ett fält $B_z = 0$, $B_x = B_1 \cos \omega t$, $B_y = 0$?

Man kan alternativt skriva Bloch-ekvationerna som två komplexa ekvationer genom att införa $M_{xy} = M_x + iM_y$, som för σ_{xy} ovan.

Bloch räknar ut typisk magnetisering för protoner vid rumstemperatur från $M = \chi B$ med Curies formel för susceptibiliteten χ och får att det är för litet för att observera för typiskt B , men poängterar att dess tidsderivata inte är för liten att observera (därför titeln *Nuclear Induction*): typisk inducerad spänning blir millivolt.

¹Tillståndsrummet uppfyller de matematiska axiomen för ett *Hilbert-rum*, men det är lite onödigt att dra in hela den formalismen här: det kraftfulla i Hilbert-rum ligger främst i att de kan vara oändligt-dimensionella, som funktionsrum, medan vi bara har två bastillstånd, som ju är ganska mycket mindre än oändligt.

5 Mikroskopisk modell

I Brown [4] ges inte mycket mer detaljer. Relaxationstiderna är från växelverkan med omgivningen: T_2 från närliggande spinn ("spinn-spinn", där det första "spinn" är protonen själv) eller ett slags medelfält från hela "gittret"², som ger T_1 , och kallas "spinn-gitter".

Relaxationstiden T_2 kan man tänka på som att den kommer från ojämnheter B_{irreg} som de närliggande spinnen ger upphov till. Bloch uppskattar i originalartikeln (ekv. (33)) att fältet $B_{\text{irreg}} \approx \mu_p/r^3$ som vid $r = 0,2 \text{ nm}$ ger 10^{-4} T . Uppskattningen blir

$$T_2 = \frac{1}{|\gamma|B_{\text{irreg}}} \approx 10^{-4} \text{ s} \quad (2)$$

som diskuteras lite till i Brown-Cheng-Haacke, s.622.

Modeller för T_1 verkar svårare att få att funka med experiment, lite mer om det i 9.

6 Ernsts ekvation

I Ernst-Andersons artikel från 1966 beskrivs hur man mer effektiv mätning än tidigare³ genom att listigt justera en frekvens av identiska radiofrekvens-pulser med given repetitionstid T_R som är sådana att de flappar magnetisering med "flippvinkeln" θ .

Här följer jag sektion 18.1.1 i [4]. Introducera flippvinkeln θ . Börja med transvers magnetisering noll. Vi har relaxationen $M_{\perp}(t_n) = M_{\perp}(0)e^{-t_n/T_2}$ för $t_n < T_R$, där t_n är tiden inom en viss cykel. För longitudinella magnetiseringen har vi att värdet innan nästa puls är oförändrat från cykel till cykel, när vi uppnått jämvikt, $M_z = M_{ze}$. Då har vi från Blochs ekvationer

$$M_{ze} = M_{ze}e^{-T_R/T_1} \cos \theta + M_0(1 - e^{-T_R/T_1}). \quad (3)$$

Löser vi ut M_{ze} och använder att flippvinkeln efter hela cykeln är sådan att $M_{\perp} = M_z \sin \theta$ får vi:

$$M_{\perp} = M_{ze} \sin \theta e^{-t_n/T_2} = M_0 \sin \theta \frac{1 - e^{-T_R/T_1}}{1 - e^{-T_R/T_1} \cos \theta} e^{-t_n/T_2} \quad (4)$$

Man modellerar sedan genom att använda samma ekvation men ersätta T_2 med T_2^* och M_0 med ρ_0 (protondensitet) och utvärdera vid en specifik ekotid T_E . Signalstyrkan S ges då approximativt av "Ernsts ekvation"⁴ [12]

$$S = \rho \sin \theta \frac{1 - e^{-T_R/T_1}}{1 - e^{-T_R/T_1} \cos \theta} e^{-T_E/T_2^*} \quad (5)$$

Signalstyrkan maximeras tydligen för en viss flippvinkel $\cos \theta = e^{T_R/T_1}$ (fel i Brown ekv. (18.15), står inversen?) som kallas Ernst-vinkeln.

Papp använder det här i sin avhandling [10].

7 MRI Questions och kvantverklighet

Jag tycker MRI-sajten som Jakob rekommenderade, i synnerhet [Quantum reality](#), är tydlig med att åtminstone halv-djupa frågor i kvantfysik har implikationer för konkreta MRI-frågor som

1. Om en proton bara kan peka upp och ned, hur gör man en 10° - eller 90° -puls?
2. Varför har transversa magnetiseringen genast efter en 90° -puls exakt samma magnitud som longitudinella magnetiseringen genast innan pulsen?
3. Varför gör inte RF-fältet helt enkelt att spinn-upp- och spinn-ned-populationerna blir lika?

²fast det är vätska

³Det finns fler än en Ernst som håller på med MRI, det här är [R.R. Ernst](#), nobelpris i kemi 1991 för "högupplösande kärnmagnetisk resonansspektroskopi".

⁴står inte i citerade artikeln [12]! Måste ha kommit senare.

4. Varför gör fortsatt anbringande av RF-fältet att magnetiseringen roterar förbi 180° ? Borde det inte istället tvinga fler och fler protoner in i spinn-ned-tillståndet?

Tänk själv utifrån den här texten, jag skriver mina svar i appendix A.

Däremot om jag förstätt det rätt så skall man inte tänka på spinnen i MRI som snärjda (entangled) med varandra. (Det vill säga, såvitt jag förstår är min essä om snärjelseentropi inte relevant i MRI!) Det är sant att NMR-fysiker studerar snärjda spinn i labbet, men i praktisk MRI vid rumstemperatur är nog fasrelationer mellan olika spinn alldeles för svaga, dvs. bruset (noise) som spinnen utsätts för i den ganska "smutsiga" omgivningen i människokroppen. Å andra sidan är mikroskopiska modeller (spin-spin T2 och spin-lattice T1) ytterst kvantmekaniska, dvs. de måste egentligen ta hänsyn till snärjelse mellan varandra och med omgivningen, så det är en snärjelse-entropi associerad med det, men det verkar inte diskuteras i detalj i MRI, antagligen för att det är för komplicerat i för att vara användbart i tillämpningen, det är då bäst att baka in det i fenomenologiska parametrar.

MRI-Questions hänvisar till danska sajten drcmr.dk. Stundtals jättekonstig. Men en bra poäng: en statistisk mängd (ensemble) skall man rita som en "igelkott". Bra också på s.83-84: Observationer beror bara på täthetsmatrisen. Kon-bilden representerar låg entropi.

8 Grundläggande elektromagnetism

8.1 Att få till ett homogent magnetfält

Två grundläggande koncept är solenoidspolar och Maxwell-spolar. Spolarna i MRI är varken eller men kan betraktas som avancerade vidareutvecklingar av dem [4].

Exempel är en och två strömcirklar. Mellan två tar man ut alla udda termer. Solenoid är ett typiskt exempel i kursen Elektromagnetisk fältteori.

Sedan i gradientspolen vill man inte ta ut udda termer, utan kan ta ut jämna termer. Maxwell beskrev 1873 en konfiguration som var "sensibly uniform".

Maxwell är sfärisk, och solenoid är lång cylinder. För MRI har man istället en kort cylinder där spolarna inte är en kontinuerlig lindning utan separata spolar vars tjocklek och radie optimeras för att få ned inhomogenitet till ppm (miljondel), t.ex 5 ppm på 50 cm. (Varför säger man så, är det inte samma sak som 1 ppm på 10 cm?) För sådan noggrannhet behöver tekniker gå in och sätta in små bitar i varje enskild MRI-kamera för att finjustera.

8.2 Kraft

Som i videon om spinn och kvantbitar omnämnd ovan är energin $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ och $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, så för $\vec{B} = B(z)\hat{z}$ är $F_z = \mu_z dB/dz$. Mer om proportionalitetskonstanten $\vec{\mu}$ nedan. För att få känsla för storleksordningar, $B_0 \approx 1$ T (stort), $B_1 \approx 10\text{-}50$ μ T (litet). Vi ser att $\mu B = \frac{\hbar\omega}{2}$ i Susskind, så Larmor-frekvensen är $\omega = 2\mu B/\hbar$. **Övning:** stoppa in siffror för elektronen och protonen. Svaren står nedan.

Ett ickemagnetiskt material kan bli polariserat av ett externt magnetiskt fält, så att $\mu \sim B$. Kraften blir då $F_x = \mu_x dB/dx \sim B dB/dx$ [11]. Det är relevant för MRI-säkerhet i att det kan flyga saker genom rummet. Susceptibiliteten χ för nickel är 600 och för järn upp till 200 000, men få vardagsobjekt är rent järn; för olika sorters stål varierar susceptibiliteten väldigt mycket, från kanske 0,1 till 1000. Om vi väljer $\chi = 100$ så kan en typisk kraft vara [11]

$$\frac{F_B}{mg} = C\chi B_0 \frac{dB_0}{dx} = 10 \frac{\text{m}}{\text{T}^2} \cdot 100 \cdot 20 \text{mT} \cdot \frac{15 \text{mT}}{0,5 \text{m}} = 60\%$$

(dimensionslöst). Man ser från fig. 2 i [11] att 1 m från magneten ungefär är gränsen då t.ex. en sax börjar lyfta från marken, $F_B \sim mg$. Närmare blir mg helt överväldigad av kraften från magnetfältet.

“Translational force testing” är just att hänga ett objekt och mäta vinkeln i jämvikt för att mäta F_B/mg vid svagare fält.



8.3 Magnetiskt moment: mätning

Vi kan betrakta Stern-Gerlach-experimentet som att det via $F_z = \mu_z dB/dz$ ger en ganska direkt⁵ mätning av $\mu_e \approx 10^{-23}$ J/T för elektronen. När Rabi gjorde om Stern och Gerlachs experiment med protoner uppmätte han $\mu_p \approx 10^{-26}$ J/T för protonen, runt tre storleksordningar mindre stark magnetism. För protonen blir då Larmor-frekvensen $f_0 = 42$ MHz för $B = 1$ T, som är ungefär hälften av typisk frekvens för FM-radiostationer som du kanske är van vid. (Varning: det som kallas “RF-fält” är B_1 , som är ett svagare fält än B_0 . Frekvensen f_0 här är inte frekvensen hos fältet utan hos något som svänger på grund av fältet.)

Men hur uppstår magnetiska momentet μ ursprungligen? Vi tar elektronen först, sedan protonen.

8.4 Magnetiskt moment μ från elektrisk ström I ?

Spår från den tidigare förvirringen kring elektronens kvantfysik finns kvar i terminologin än idag i och med [gyromagnetiska förhållandet](#) γ , som i klassisk makroskopisk fysik är förhållandet mellan magnetiska momentet $\vec{\mu}$ och rörelsemängdsmomentet \vec{L} kring en stel kropps egen axel som ger upphov till $\vec{\mu}$ via induktion (Ampères lag för en ström $m = IA$ med utsvept area A):

$$\vec{m} = \gamma \vec{L}$$

Kan vi mäta \vec{L} separat, t.ex. i newtons fysik genom att mäta massfördelning i objektet, räkna ut tröghetsmoment I_{tr} och multiplicera med frekvensen $L = I_{\text{tr}}\omega$, så kan vi räkna ut γ från mätvärden. Modellen modifieras något bortom newtonsk fysik, men detaljerna är inte viktiga här⁶. För trots att vi mätt $\vec{\mu}$ för elektron och proton så har vi inget sätt att direkt mäta \vec{L} : det enda vi kan göra är en teoretisk modell för hur en partikel kan tänkas bestå av något elektriskt laddat som snurrar, men spinnet hos elektronen går som bekant *inte* att förstå som något som “snurrar”: μ_e är såpass stort att den då måste rotera snabbare än ljusets hastighet. **Övning:** slå upp tröghetsmomentet för ett homogent klot, ta övre uppmätta gränsen för elektronens egenradie och visa att “elektron-klotet” måste snurra fortare än ljusets hastighet c för att ge upphov till uppmätta magnetiska momentet μ_e . (Kommentar: istället för att bli överraskad att det inte funkar, tänk på att det var ett antagande att elektronen är

⁵Det man mäter “direkt” är förstås avlänknningen i meter, men det är inte svårt med kastparabel-uträkning att från det och avståndet utmed strålriktningen räkna ut vilken konstant kraft som måste ha verkat, det menar jag med “ganska direkt”. Vid första anblick kan det verka vara härklyveri, men det är i själva verket ett antagande som snyger sig in att kraften verkligen är konstant över strålriktningen, vilket knappast exakt är fallet.

⁶Är du intresserad finns både specialrelativistisk ([Thomas-precession](#)) och allmänrelativistisk fysik ([Lense-Thirring-precession](#)) att läsa om. Varför är inte viktigt här står i följande mening.

ett litet klot av homogent distribuerad laddning, som det inte finns något experimentellt stöd för och som motsägs av den här uträkningen.)

För att poängtera att gyromagnetiska förhållandet inte uppenbart går att förstå på partikelnivå har det ett aningens annat namn för partiklar, "g-faktor". För elektronen går faktorn att förstå direkt från Dirac-ekvationen, som är relativistisk, men då **definierar man om** μ uttryckt i s.k. formfaktorer F_i som indirekt går att mäta i partikelfysikexperiment, och ger därmed upp kopplingen till något som snurrar. (Det råder ingen brist på mer moderna hypoteser om partiklars uppbyggnad, en av de mer populära är *strängteori*, där är det verkligen något som snurrar. Men strängteori har f.n. inget direkt experimentellt stöd, bara indirekt stöd – se **min video!** Frågan vad som ger upphov till μ_e är viktig och intressant, men vi lämnar den till någon annan gång.)

8.5 Magnetiskt moment: protonen

Eftersom protonens uppmätta magnetiska moment μ_p från Rabis experiment (och senare varianter av det) är mycket mindre än μ_e finns en chans att förstå det som att det induceras av en ström av kvarkar inne i protonen, vars radie i motsats till elektronens egenradie är hyfsat känd: runt en femtometer. För skojs skull, låt mig göra en naiv uträkning. Om laddningarna som går runt i strömmar inne i protonen är storleksordningen e (kvarkar har tredjedelar av e) och rör sig omkretsen $2\pi r_p$ med hastighet nästan ljusets så ger det enligt $s = vt$ strömmen $I = e \frac{c}{2\pi r_p}$. Den utsvepta arean är $A = \pi r_p^2$, så enligt Ampères lag har vi magnetiska momentet

$$m = IA = e \frac{c}{2\pi r_p} \pi r_p^2 = \frac{ecr_p}{2} \approx 10^{-26} \text{ J/T} . \quad (6)$$

En annan bild av hur μ_p kan tänkas uppstå är att smeta ut hela protonens e över ett homogent klot med massa m_p ger storleksordning $\frac{e}{m_p}$, och det ger också ett hyfsat resultat för μ_p (testa själv!). För att skilja på de två bilderna av hur μ_p uppstår (är laddningen 1. utsmetad i klot eller 2. små cirkelströmmar?) skulle vi alltså måsta förstå protonens uppbyggnad i detalj. Frågan "vad är g-faktorn hos protonen?" utan att vilja prata om protonens uppbyggnad har alltså inget svar. Först gör man en modell för hur magnetiskt moment uppstår från rörelse av laddning, sedan kan man bestämma g-faktorn i den modellen. Ta inte de här naiva modellerna på för stort allvar, det räcker för tillfället att ta μ_p som ett uppmätt värde.

8.6 Närfält kontra långtborta-fält

Från MRI-Questions: *It is OK to talk about radio frequencies, but probably not radio waves.* Våglängden för radiovågor med 42 MHz (Larmorfrekvensen $\omega_0/(2\pi)$ för 1 T) är i vakuum

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{42 \cdot 10^6} = 7 \text{ m} .$$

Eftersom avståndet från magneten till fältpunkten (dvs. en viss proton) är mindre än 7 m är det inte användbart att prata om elektromagnetiska "vågor". En elektromagnetisk våg har ungefär lika stort tidsberoende elektriskt fält som tidsberoende magnetiskt fält⁷, men fältet från en MRI-magnet har försumbart tidsberoende elektriskt fält, dvs. det är en "dålig antenn" men bra fältgenerator.

Det var ett grovt argument, för människan är ju inte vakuum. Enligt [11] är relativa permitteten $\epsilon_r \sim 80$, så $\sqrt{\epsilon_r} \sim \sqrt{80} \sim 9$, så våglängden för 1 T är runt $7/9 \text{ m} = 78 \text{ cm}$, eller för 3 T runt 26 cm, ungefär som en människas magområde (abdomen). Men det ändrar inte påståendet i förra stycket: "långt borta" från källan vore många våglängder bort. MRI-Questions hänvisar till Hoult [8] som är lite konstig och släpar in kvantfysik, men poängterar i alla fall att det är ett **närfält**.

Multipol-utveckling är klassisk elektrodynamik. Det börjar traditionellt i oändligheten, dvs. man gör en Taylorutveckling av \mathbf{E} eller \mathbf{B} i $1/r$, det är fältet långt borta (*far field*). Men man kan också göra en motsatt Taylorutveckling nära källan (*near field*). På matematisk fysik II utgår jag från exemplet

⁷Man brukar rita och säga så, men vad betyder det när de mäts i olika enheter? Tänk på energi.

med en ledande sfär i homogent elektriskt fält, och vi brukar diskutera att det går att implementera det med laddningar i oändligheten och en närfältsutveckling. Det två Taylorutvecklingarna är till och med relaterade: lösning till Laplace-ekvationen i två dimensioner är i komplexa variabler en harmonisk funktion, som går att skriva som summa av holomorf och antiholomorf, så efter konform avbildning är funktionen fortfarande en lösning lokalt, enda frågan är då randvillkor. Yttre dipol och inre dipol diskuterar jag kort i [den här videon](#), det beskrivs mer systematiskt i Jacksons bok. Poängen är att Maxwells ekvationer alltid gäller, men fälten här beskriver inte en elektromagnetisk våg, dvs. elektriskt fält och magnetiskt fält med konstanta (max-)amplituder i rummet.

Polarisationen hos elektromagnetisk våg (som vi inte har här) är riktning hos det elektriska fältet. Som Brown skriver på s.42 menar man med polarisering inom MRI riktningen hos magnetiska fältet. Man kan välja koordinater som roterar med precessionen på grund av B_1 (inte B_0), som ovan.

8.7 Signal kontra brus (noise)

Om vi integrerar Maxwells ekvation

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7)$$

över en cirkelformad ledare med area A får vi Faradays lag: en spänning (emf) från ett tidsberoende magnetiskt flöde

$$V = -\frac{d}{dt} \int_A B dS = -\frac{dB}{dt} A \quad (8)$$

om arean är konstant i tiden, som är vår kärninduktions-”signal”, precis som i Blochs ursprungsartikel. I Brown et al [4] poängteras att tidsberoendet i B domineras av $e^{i\omega_0 t}$, alltså Larmorfrekvensen ω_0 (relaxationstiderna motsvarar mycket långsammare processer) så $V \sim \omega_0 M_0$. (Det är viktigt att ha i åtanke att vi pratar om tidsderivator d/dt , så signalen måste bli proportionell mot någon frekvens, så den går mot noll för noll frekvens.) Vi har från ovan att både $M_0 \sim B_0$ och $\omega_0 \sim B_0$. Experiment visar att bruset ökar ungefär linjärt med magnetfältet $\sim B_0$, så sätter vi ihop alltihop har vi

$$\text{SNR (Signal-to-noise ratio)} \sim \frac{\omega_0 M_0}{B_0} \sim \frac{B_0^2}{B_0} = B_0. \quad (9)$$

Man vill alltså ha så stort B_0 som möjligt, det finns upp till 7 T. Här på Karlstads centralsjukhuset har man för närvarande två stycken: 1,5 T och 3 T.

8.8 Brännskador?

Man kan få brännskador om man t.ex. har på sig en guldkedja. Men hur är det möjligt, spänningarna är ju så små? Det är för att resistansen hos en ledare är en liten brådel av en ohm, se t.ex. [den här sidan](#). Faradays lag ger att beloppet av inducerade spänningen i guldkedja runt halsen (kanske 2 dm²) är

$$\frac{dB}{dt} \cdot A \sim 50 \text{ T/s} \cdot 0,02 \text{ m}^2 = 1 \text{ V}$$

och om resistansen hos ledaren är en milliohm så blir effekten $P = IV = V^2/R = 1 \text{ kW}$, som en brödrost.

9 Spinn-spinn och spinn-gitter

Jag nämnde modeller ovan. Även spinn-gitter kommer från en spinn-spinn-växelverkan, fast man har bildat ett medelvärde över alla de andra (medelfält).

Ramsey och Purcell [7] förklarade att växelverkan mellan atomkärnor i olika atomer/molekyler som går *via elektronspinn i bindning*, och ger en effektiv växelverkan mellan atomkärnan. (Det verkar som att folk mer nyligen uppmätt liknande om de bara är nära varandra och inte bundna.) Det är

relevant för NMR att det experiment de försökte förklara var Hahn-Purcells spinn-eko-experiment mellan protoner i [dikloroacetaldehyd](#). Växelverkan-termen i Hamilton-operatören är

$$H_{\text{int}} = 4J\hbar\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2$$

där $J/2\pi = 0,7\text{Hz}$.

Varning: om du läser om "kärnväxelverkan" så handlar det annars ofta om stark kärnkraft, t.ex. om du slår upp "proton-proton-växelverkan". Notera att det jag pratar om här *inte* är stark kärnkraft (*strong force*, som förmedlas av gluonen), en fundamental kraft i naturen, vars räckvidd bara är några femtometer, alltså mycket kort. Här pratar jag om (elektro-)magnetism, som når ända utanför atomen, t.ex. ett antal nanometer. På sådana längre avstånd är starka kärnkraften helt försumbar.

Hittar du någon bra referens om mikroskopiska modeller för T_1 och spinn-gitter så tipsa mig.

10 Deuterium

Kranes bok om kärnfysik 4.1: "deuteronen är enklaste bundna tillståndet av nukleoner [...] för kärnfysiker borde deuteronen vara som väteatomen för atomfysiker [...] oturligt nog har den inga exciterade tillstånd". Deuteriumkärnan, en proton och en neutron, är så svagt kopplad att den går sönder istället för att exciteras. Krane argumenterar att den inte har orbitalrörelsemängdsmoment ℓ , så spinnen är summan (ekv. 4.8)

$$\mu_D = (-1.91 + 2.79)\mu_B = 0.88\mu_B$$

som stämmer överraskande bra för ett såpass komplicerat system.

Här är en lite nyare kemi-studie av koppling mellan vanligt väte och deuterium: "Coupling between proton and deuterium is most commonly seen in the solvent signals of the 1H spectrum (fig. 8) and sometimes in the residual water signal that has become partially deuterated. (In the case of D_2O as a solvent, fast proton/deuteron exchange precludes the observation of 1H - 2D coupling in the water signal.) Deuterium is a spin-1 nucleus so its coupling forms 1:1:1 triplets for each coupled deuterium, 1:2:3:2:1 quintets for two coupled deuteriums and 1:3:6:7:6:3:1 septets. 1H - 2D couplings are typically 1 to 2 Hz". Det är samma storleksordning som Hahn-Purcells 0,7 Hz ovan. Mer på [What is NMR](#) [3].

11 Kemi: spelar elektronerna i atomen ingen roll?

Jo. Ett nyckelord hur atomfysiken påverkar kärnfysiken är kemiskt skift. Jämför gärna med Stern-Gerlach-experimentet: Lorentz-kraften $F_L = qvB$ skulle i en typisk uppställning få enskilda elektroner att avlänkas mycket mer än vad de avlänkas på grund av $F_{\text{mag}} = \mu dB/dz$. (Övning: stoppa in typiska tal och testa det.) Därför använde Stern och Gerlach neutrala atomer, som inte har någon total elektrisk laddning. Med "total" menas mer precis i en multipolutveckling att monopolmomentet är noll, medan dipolmomentet inte är noll på grund av laddningsfördelning, dvs. alla elektriska laddningar är inte precis ovanpå varandra.⁸ Det är det som ger upphov till van-der-Waals-krafter mellan molekyler i nästan ideal gas ([video](#)). Laddningsseparation finns förstås i enskilda atomer också, men när man sätter ihop enskilda atomer till molekyler blir elektronmolnen mer deformerade på olika sätt. Ett konkret exempel från MRI-Questions är [fett kontra vatten](#). I vatten H_2O är syreatomen O bra på att dra bort elektroner från protonerna i väteatomerna H, medan kolatomerna C i fett inte är så bra på det, och protonerna i H-atomerna i fett upplever ett svagare magnetfält.

12 Supraledning

Det är kanske inte jätte viktigt att gå in på detaljerna i supraledande magneten. Men hur många tesla tror du den tappar på ett år? Och hur hade det gått om man hade försökt använda kopparspole

⁸Här pratar jag om multipolutvecklingen i oändligheten. Blanda inte ihop det med närfältsutvecklingen i MRI, som jag nämnde ovan: patienten är nära magneten jämför med typiska variationen i fältet, men magneten är långt från atomen relativt atomstorleken.

istället? (Uppgift 27.4 på s.832 i [4] om hur varm den skulle bli, och det är också en fråga om stabilitet i tiden; ström vanlig kopparledning fluktuerar i praktiken på skala av bråkdel av en sekund, medan supraledande ström är ger fält som varierar högst med någon mikrotlesla per timme.) Mer på superconductors.org.

A Mina svar till de fyra frågorna om "kvantverklighet"

Magnetiseringen betyder $\mathbf{M} = \langle \mathbf{S} \rangle$, dvs. det är inbakat i ordet "magnetisering" att det är ett medelvärde över en mängd spinn (ensemble). Man kan ställa frågor om medelvärde för mätningar av ett enda spinn istället för medelvärdet över många, men faktiskt gäller samma matematik om man bara sätter sig in lite i Blochsfären som representation av tillståndet $|A\rangle$ i början av texten. Medelvärdet för ett spinn uppför sig enligt Heisenbergs rörelseekvation (t.ex. Susskind kap.4.11) som en klassisk kompassnål i ett magnetfält.

1. Kolla först att du är med på introduktionen till Bloch-sfären i början av den här texten. På Bloch-sfären kan vi välja ursprungliga spinn som att det representeras av nordpolen. (Man brukar rutinmässigt använda ord som egentligen syftar på den mest bekanta sfär vi brukar sätta koordinat-system på: Jorden⁹.) Tillståndet rör sig i den här frågan utefter en viss longitud (linje nord till syd) t.ex. den som går utefter nollmeridianen $\phi = 0$. Vilken meridian som är "noll" är uppenbarligen koordinatval (är Greenwich världens centrum?), men när vi väl gjort det valet är polärvinkeln θ fysikalisk för den förekommer i magnetiska energin. Det är den vi kan rotera till 10 eller 90 grader, eller vad vi vill. **Övning:** visa att rotation 90° efter nollmeridianen ger tillståndet "spinn höger" $|r\rangle$.

2. Vektorn som representerar spinn har minsta möjliga belopp¹⁰ av rörelsemängdsmoment. För spinn s är beloppet $\sqrt{s(s+1)}\hbar$, så för spinn 1/2 är det $\sqrt{(1/2)(1/2+1)}\hbar = (\sqrt{3}/2)\hbar$, medan varje komponent är $\pm(1/2)\hbar$. **Övning:** visa därifrån att vinkeln för en klassisk vektor vore 55°. Det är därför man ofta ritar en kon med öppningsvinkel vid 55°, vilket är lite motsägelsefullt eftersom vi precis har argumenterat att det inte är en klassisk vektor: en sådan kan per definition inte vara i superposition eller vara obestämd.

Det viktiga med $(\sqrt{3}/2)\hbar$ kontra $\pm(1/2)\hbar$ är att det inte är samma, dvs. att vi alla fall inte får rita en vektor som pekar exakt rakt upp, som skulle ha z -komponent $(\sqrt{3}/2)\hbar$. Spinn-1/2 är maximalt obestämt, medan högre och högre spinn (t.ex. vissa större atomkärnor, som används i NMR mer allmänt men inte ofta i MRI) blir mer och mer klassiska. Protonspinn är alltid maximalt kvantfysiskt, eftersom det alltid har spinn 1/2. Det här är redan inbyggt i Bloch-sfären som representation: vi representerar ett perfekt polariserat tillstånd som en punkt på en sfär. Vi har därför kvar punkter i klotet innanför sfären (sfär = klotyta) att använda för att representera icke-perfekt-polariserade tillstånd, ända in till punkten i mitten av sfären som representerar helt opolariserat tillstånd. Punkter inuti Bloch-sfären representerar alltså *inte* ett spinn som är "kortare" som vektor (lägre rörelsemängdsmoment), eftersom spinn-1/2 redan har det minsta möjliga nollskilda beloppet, $(\sqrt{3}/2)\hbar$.

Notera att Susskind normerar sin mätning så att $s_z = \sigma_z \hbar / 2$ där $\sigma_z = \pm 1$ är enhetslös. Enligt Pytagoras sats i 3D (Susskinds "spinn-polariserings-princip") är $\langle \sigma_x \rangle^2 + \langle \sigma_y \rangle^2 + \langle \sigma_z \rangle^2 = 1$ för alla tillstånd hos ett spinn.¹¹

Kommentar: man hade kunnat ställa liknande fråga om varför vi representerar tillstånd hos *elektronerna* i atomen (grundämnen i periodiska systemet) som $|n, \ell, m_\ell, m_s\rangle$ med fyra kvanttal och inte fem: vi behöver ange både ℓ och m_ℓ , men inte s och m_s , för elektronspinnets belopp $s = (\sqrt{3}/2)\hbar$ är alltid samma, när det redan är minsta möjliga nollskilda. Rörelsemängdsmomentets belopp (rotationsenergi runt atomkärnan, inte spinn) kan däremot vara mer än minsta möjliga nollskilda $\sqrt{2}\hbar$,

⁹Notera dock att i jord-koordinatsystemet är latitud 90° vid nordpolen och 0° ekvatorn. I vanliga sfäriska koordinater mäts polärvinkeln θ från nordpolen, så $\theta = 0^\circ$ vid nordpolen, det kallas om man skall vara petig *kolatitud* istället för latitud. Frågan när man använder jord-terminologi i andra sammanhang än just Jorden är hur mycket man vill hålla sig till detaljerna!

¹⁰man säger ofta lite slarvigt "längd" för alla vektorer, men det låter som att det skulle vara i meter, medan enheten för spinn är newtonmeter. Ord som "belopp" eller "magnitud" är mer neutrala ord än "längd".

¹¹Spinn-polariserings-principen gäller däremot *inte* för snärjda tillstånd med flera spinn, man kan ha $\langle \sigma_x \rangle^2 + \langle \sigma_y \rangle^2 + \langle \sigma_z \rangle^2 \neq 1$ för snärjda tillstånd, det är en viktig poäng i kap. 6 och 7, men enligt ovan tror jag snärjelse av flera spinn för det mesta inte är relevant i MRI vid rumstemperatur.

om elektronen har tillräckligt med total energi, som anges av huvudkvanttalet n . **Övning:** vilket grundämne i periodiska systemet är det första då elektronen i grundtillståndet har tillräckligt med total energi för att beloppet av rörelsemängdsmomentet skall kunna vara mer än minsta möjliga nollskilda $\sqrt{2}\hbar$? Vad är högsta kända belopp?

3. Jag förstår inte riktigt varför man skulle tro det, min gissning är att kanske tänker man sig fältet som att det kommer "i sidled" och "puttar lika mycket upp som ned"? (I PhET kommer det underifrån. Det har däremot bristen att det ser ut som en elektromagnetisk våg.) Isåfall är det i alla fall fel, vilket man ser i uppgiften i Fysik-3-kompendiet: B_1 får spinnets att rotera utefter Bloch-sfären, det verkar i en viss riktning, det är inte slumpmässig påverkan.

4. En klassisk kompassnål i ett magnetfält fortsätter rotera. Jämför fråga 1 för att se att det påståendet besvarar frågan.

Referenser

- [1] D.W. McRobbie, E.A. Moore, M.J. Graves, M.R. Prince, "MRI from Picture to Proton" (2007), Cambridge.
- [2] A.D. Elster, [MRI Questions](#), webbsajt.
- [3] What is NMR site (HU Jerusalem), website chem.ch.huji.ac.il/nmr/whatisnmr/hetcoup.htm
- [4] R.W. Brown, Y.C.N. Cheng, E.M. Haacke, M.R. Thompson, R. Venkatesan, "Magnetic Resonance Imaging: Physical Principles and Sequence Design" (2014), Wiley.
- [5] L. Susskind, A. Friedman, "Quantum Mechanics: The Theoretical Minimum" (2015), Basic Books. Sajt: theoreticalminimum.com. Finns YouTube-föreläsningar.
- [6] F. Bloch, *Nuclear Induction*, Phys. Rev. **70** (1946) 460. doi:10.1103/PhysRev.70.460
- [7] N.F. Ramsey, E.F. Purcell, "Interactions between nuclear spins in molecules" (1952), Phys. Rev. **85** 143. doi:10.1103/PhysRev.85.143
- [8] D.I. Hoult, *The origins and present status of the radio wave controversy in NMR*. Concepts Mag Reson Part A 2009; 34A(4):193-216.
- [9] R. P. Feynman, F. L. Vernon, Jr. and R. W. Hellwarth, "Geometrical Representation of the Schrodinger Equation for Solving Maser Problems," J. Appl. Phys. **28** (1957) 49. doi:10.1063/1.1722572
- [10] D. Papp, *Robust and Fast Quantitative MRI for Clinical Deployment*, doktorsavhandling, Imperial College 2018
- [11] Panych, Madore, "Physics of MRI Safety" (2018), J. MRI. onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/jmri.25761
- [12] R.R. Ernst, W.A. Anderson, "Application of Fourier Transform Spectroscopy to Magnetic Resonance", Review of Scientific Instruments **37**, 93 (1966); <https://doi.org/10.1063/1.1719961>