Instuderingsfrågor till Polchinski

Grovplanering med rekommenderade uppgifter:

Fö 1	Kap 1	1.5H, 1.6Y
Fö 2	Kap 2	2.1H, 2.5H
Fö 3	Kap 2	Inlämning G1-5
Fö 4	Kap 3	3.2H, 3.3H , 3.7H
Fö 5	Kap 4	4.1H
Fö 6	Kap 5	5.1b(H)
Fö 7	Kap 6	Inlämning A1
Fö 8	Kap 6	6.9H (lång!)
Fö 9	Kap 7	7.1H
Fö 10	Kap 7	7.4Y
Fö 11	Kap 8	8.1H
Fö 12	Kap 10	10.5H, 10.11H, A1
Fö 13	Kap 12	A2, A3, A4 (inget i H!)
Fö 14	Kap 13/14	13.4H, A5

H är Headricks lösningsmanual arXiv:0812.4408 (81 av 202 uppgifter i Polchinskis bok),
M är McGreevys kurs 8.821 på MIT 2007:
http://web.mit.edu/8.821/fall07/index.html
Y är Yins kurs "Physics 287a" på Harvard 2014:
http://isites.harvard.edu/icb/icb.do?keyword=k106861
Det finns många andra lösningar till uppgifter i Polchinskis bok på nätet, men många är förvirrande eller felaktiga.

Ungefär två föreläsningar i veckan, kl 15:15-17:00. Fem grund+fem avancerade inlämningsuppgifter, och ett litet projekt (muntlig presentation, ingen obligatorisk skriftlig rapport).

Jag har en fil med lösningsskisser till nedanstående instuderingsfrågor, som jag lägger ut runt kursstart. När kursen är över skall du helst ha *skrivit ned* svar på alla frågorna nedan, som du sedan självrättar och talar om för mig hur många poäng du fick. Börja gärna i väldigt god tid!

Kapitel 1

1. **Punktpartikel i krökt rumtid.** Det är en standarduträkning i allmän relativitetsteori att punktpartikelverkan $S_{\rm pp}$ ger geodetekvationen.
   https://en.wikipedia.org/wiki/Geodesics_in_general_relativity
   under "Deriving the geodesic equation via an action" (För ett svart hål säger den t.ex. vilka trajektorier som faller in.) Det här gäller tidsartad partikel (varför?), och därför *"Since the four-velocity is normalized to* -1*..."*. Men om fyrhastighetens längd är konstant -1, är inte variationen av verkan identiskt noll?

2. **Finns det masslösa bosoner X i 2 dimensioner?**
   https://en.wikipedia.org/wiki/Mermin-Wagner_theorem
   (notera kopplingen till nobelpriset i fysik 2016 och Kosterlitz-Thouless-fasövergången). Hur uppför sig alltså Greensfunktionen för X (dvs. för Laplaceekvationen i två dimensioner) på långa avstånd $r \to \infty$? Vi kommer att använda fältet ∂X som är enklare än X. Hur uppför sig Greensfunktionen för ∂X för $r \to \infty$?

3. **Extra dimensioner.** Det man oftast hör är att de extra dimensionerna, om sådana skulle finnas, måste vara "små och ihoprullade", som i Kaluza-Klein-teori:
   https://en.wikipedia.org/wiki/Kaluza-Klein_theory
   https://sv.wikipedia.org/wiki/Oskar_Klein

(Detektivfråga: kan du se Oskar Kleins gravsten på bilden? Var i Stockholm ligger Norra begravningsplatsen?) Kaluza-Klein-teori kommer i kapitel 8[1].
Sedan 1998 finns alternativet att de extra dimensionerna inte är små och ihoprullade, utan stora upp till någon mikrometer, men istället med begränsningen att andra krafter än gravitation inte får inte ta sig in i dem:
https://en.wikipedia.org/wiki/Large_extra_dimension
eller om de är krökta[2] så får de vara hur stora som helst:
https://en.wikipedia.org/wiki/Randall-Sundrum_model
som är motiverade av s.k. D-bran (hypermembran med Dirichlet-randvillkor, Polchinski kap.13). Men om dimensionerna nu skulle vara stora, varför har vi inte märkt dem?

4. **Är inbäddningen en inbäddning?**
Det kanske mest fundamentala objektet i strängteori är *inbäddningen* $X^\mu(\tau, \sigma)$ från världsytan (τ, σ) till den D-dimensionella rumtiden ($\mu = 0, \ldots, D-1$). Så det skulle vara lite pinsamt om inbäddningen inte kvalificierar som inbäddning i matematisk mening, t.ex. om det bara vore en *immersion*:
https://en.wikipedia.org/wiki/Immersion_(mathematics)
Immersion kontra inbäddning är en global fråga, så läs fotnot 4 (s.18) och uttryck i egna ord vad Polchinski säger om den frågan där.

5. **Är inbäddningen ens en immersion?**
Hur är det lokalt då, är $X^\mu(\tau, \sigma)$ ens en immersion, dvs. deriverbar? När jag diskuterade strängteori med den nu avlidne stockholmsmatematikern Torsten Ekedahl, var det första han frågade mig om jag visste hur en minkowskivärldsyta bäddas in i ett minkowskirum; generiska inbäddningar är singulära. Tja, sade jag, det är väl bara en Wickrotation av en riemannsk yta där det inte är några problem. (Men jag visste från forskarutbildningen att sådana uttalanden ofta är opålitliga.) Torsten var inte imponerad. Vad menade han? Om man skickar iväg två vågor från en punkt på en sluten sträng, en i varje riktning, så kommer de att träffa varandra på andra sidan. Är den träffpunkten singulär (dvs. diskontinuerlig derivata)? Är det något problem? (Jämför gärna Polchinskis fotnot 3 på s. 15.)

6. **"The Fundamental Theorem of Theoretical Physics"**.
Så kallade Bryce DeWitt ekvationen "det exp A = exp tr A" för en matris A. För en matematiker är det ett enkelt specialfall av Jacobis formel i linjär algebra[3]:
https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi%27s_formula#Corollary
men för oss fysiker används den såpass ofta, att fast Bryce skojade med namnet fanns det en viss poäng att det är värt att lära sig vår "fundamentalsats" utantill: det exp = exp tr. Så frågan är: ser du att Jacobis formel (innan man går till specialfallet) är samma som Polchinski (1.2.15): $\delta\gamma = \gamma\gamma^{ab}\delta\gamma_{ab}$? I beviset på Wikipediasidan används "adjugate matrix", på svenska heter det "adjunkt matris". Obs: "adjugate" betyder alltså *inte* "adjungerad" (eng. *adjoint*).

[1] Om man skall vara petig så kommer "Kaluza-Klein-teori" som Kaluza och Klein tänkte sig den inte alls i kapitel 8, för den blev direkt experimentellt utesluten via icke-observation av "radionen", ett masslöst skalärfält som motsvarar 55-komponenten av den 5-dimensionella metriken. Dessutom representerar "Kaluza-Klein-teori" historiskt flera olika försök: Kaluzas teori var helt *klassisk* (och har en modern efterföljare i Brans-Dicke-teorin, som inte är utesluten av experiment men hårt begränsad), men Kleins teori skulle vara *kvantmekanisk* och förklara elektronen. Einstein gillade Kleins teori som ett "alternativ till kvantmekanik", men Kleins teori misslyckas grovt med att återskapa t.ex. värdet på elektronmassan. Så mer korrekt vore att säga att kapitel 8 behandlar "generaliseringar av vissa grundläggande aspekter av de fina idéerna i Kaluza-Klein-teori".

[2] om man återigen skall vara petig: vinda som träplankor (*warped*), inte krökta geometriskt (*curved*), för en dimension kan inte ha någon *inre* krökning som Gauss definierade den. Att vara vind betyder att dimensionen har en *yttre* krökning som inbäddning i det högredimensionella rum som också innefattar våra dimensioner.

[3] Lite grand som för Euler finns det många berömda saker uppkallade efter den tyske matematikern Carl Jacobi (1804-1851), så man får specificera lite, t.ex. "Jacobis produktformel" eller "Jacobi-identiteten'. (Skall man vara petig var han inte "tysk" utan preussare, verksam i Preussens huvudstad Berlin. Tyskland i modern mening skapades 1871.)

7. **Topologi: hörn och kanter**. Matematiker kallar χ numera *Eulerkarakteristik*, inte Eulertal, eftersom det (som vanligt när det gäller Leonhard Euler) finns minst 9 kandidater för vad som skall heta Eulertal[4]. I matematikområdet *topologi* definierar man Eulerkarakteristiken som en abstrakt variant av Eulers ursprungliga formel för polyedrar: χ = hörn − kanter + regioner. Kuben har t.ex. 8 hörn, 12 kanter, och 6 regioner. Innan du tittar på nedanstående Wikipedia-sida, förväntar du dig att summan χ blir samma för pyramid och sfär, till exempel, som den blir för kub?
   https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_characteristic
   Glatta ytor som skiva (*disk*) och sfär står en bit längre ned på sidan.
   (Det här konceptet kan generaliseras till vektorknippen:
   https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_class
   som det är OK om du aldrig hört talas om, men skaffa gärna Nakaharas bok isåfall.)

8. **Topologi och geometri**. Har du läst föregående fråga och tittat i Polchinski så kommer nu en naturlig följdfråga: Eulers ursprungliga formel för polyedrar "χ = hörn − kanter + regioner" ser inte ett dugg ut som Polchinskis (1.2.31)? Jämför
   https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss-Bonnet_theorem
   och försök förklara i ord vad skillnaden är på Eulers formel och Polchinskis (1.2.31).

9. **Fördjupning om fördjupningar.** När man först inser vad Gauss-Bonnets sats säger är den ganska otrolig: totala krökningen hos en sfär kan inte påverkas av deformationer, t.ex. att man trycker in en fördjupning på sfären. Tänk efter: betyder det att en del av krökningen i fördjupningen är negativ? När du tänkt efter, tycker du Gauss-Bonnets sats verkar självklar?
   (Satsen har långtgående generaliseringar som
   https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_Gauss-Bonnet_theorem
   https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann-Roch_theorem (notera att beviset använder formulering som i sig är generaliserad, se https://en.wikipedia.org/wiki/Grothendieck-Ri theorem)
   och den allra största generaliseringen är kanske indexsatsen:
   https://en.wikipedia.org/wiki/Atiyah-Singer_index_theorem
   Lustigt nog är *alla* de här relevanta i strängteori, så ta gärna en titt på Wikipedia-sidorna mer allmänt, men räkna inte med att förstå såvärst mycket.)

10. **0.7+1.7+2.7+... = 0.02.** *(Den här och de nästa frågorna handlar om hur du effektivt kan skumma kap. 1.3.)* Skumma fram till sidan 22 där den berömda formeln $1 + 2 + 3 + \ldots = -1/12$ diskuteras (jämför Schwartz kap.15.3.5), och tänk igenom hur du skulle göra uppgift 1.5 som är att bevisa t.ex. $0.7 + 1.7 + 2.7 + \ldots = 0.02$. Läs sedan Headricks lösning.

11. **Lorentzgruppen i D dimensioner**. Diskussionen på s.23 handlar om representationer av Lorentzgruppen. Varför pratar Polchinski om $SO(D)$ och inte $SO(D-1,1)$ som är (den sammanhängande delen av) Lorentzgruppen? Gruppen $SO(D-2)$, alltså $SO(8)$ i $D = 10$, utgör stabilisatorgruppen för ljusartade (*lightlike*) fyrvektorer. Vad betyder stabilisatorgrupp (eng. *stabilizer*, kallas också *little group*, "Wigners lillgrupp") för en viss vektor, och varför är $SO(8)$ alltså relevant i $D = 10$? Om du inte alls vet, börja gärna med att kolla upp stabilisator på
    https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_group

12. **Öppen sträng med Dirichlet-randvillkor**. Titta på Yins lösning till uppgift 1.6: spektrat för en öppen sträng med Dirichlet-randvillkor. Det här ger upphov till hela kapitel 13: Dirichlet-(mem)bran!

[4] huvudkonkurrenten i fysik är Eulertal i fluidmekanik, lite som Reynoldstal. I matematik är Eulertalen sekvensen $1, -1, 5, -61, 1385, \ldots$, koefficienterna i taylorserien för $1/\cosh x$.

Kapitel 2 [centralt]

Det mest logiska här vore egentligen att först gå igenom Blumenhagen & Plauschinns bok "Introduction to Conformal Field Theory – with Applications", som är mer grundläggande och mer algebraisk. Men det hinner vi inte, så vi kör på. En kort sammanfattning av den CFT vi behöver finns i mina stränganteckningar, men det är nog bäst att läsa den *efter* du har försökt läsa i det här kapitlet.

1. **Vågor i 1+1 dimension**. Vad kallas en våg som fortplantas åt höger utefter en 1-dimensionell sträng, dvs. som bara är en funktion av kombinationen $\sigma^1 - \sigma^0$ på världsytan, där σ^1 är rum och σ^0 är tid? (Jfr. $f(x - vt)$ i vågfysik för $v = 1$.)

2. **Spinnvågor**. Innan du läser s.40: det är användbart att vara medveten att många av de här metoderna används i statistisk mekanik och kondenserade materiens teori (kond-mat). Ett konkret exempel är spinnvågsteori (relaterat till nobelpriset 2016) som ni hade en inlämningsuppgift om i kvantfältteori, det handlar alltså om vågor som fortplantas utefter gitter av kvantmekaniska spinn (t.ex. elektroner). Utan att veta något om spinnvågor, kan du gissa om spinnvågs-operatorn $e^{i\phi(x)}$ är boson eller fermion?

3. **Normalordning.** Det är nästan ingen annan än Polchinski som skiljer tydligt på olika varianter av normalordning. Enligt (2.7.12), hade det egentligen behövts? Jämför uppgifterna 2.10 och 2.13 (du behöver inte gå igenom Headricks lösningar, men läs åtminstone uppgiftsformuleringarna).

4. **Konform transformation.** Polchinski gör en stor sak (s.44) av att konform invarians inte är diffeomorfiinvarians (invarians under allmänna koordinattransformationer) från allmän relativitetsteori. Men även en holomorf koordinattransformation sorterar väl under allmänna koordinatttransformationer. Om och om du läser t.ex. Kiritsis står det tydligt att konform transformation är ett specialfall av diffeomorfier. Hur hänger det ihop med Polchinskis kommentar? Och, vad menar han med att en massterm inte är invariant under holomorfa koordinattransformationer på världsytan, X^μ är ju en världsyteskalär?

5. **Konform avbildning.** Betrakta avbildningen $z = e^{-iw}$ i fig. 2.3, där z är "sfärkoordinaten" och w cylinderkoordinaten $w = \sigma^1 + i\sigma^2$. (Varning: jämför ekvation (2.1.12) och (2.6.4)!) Jämför konform avbildning i tidigare kurs. Hur löper "tiden" σ^2 i fig. 2.3b? Varför har jag citationstecken på "tiden"?

6. **Central laddning för X^μ-CFT:n från Virasoro-algebran**. Jag kommer att diskutera uppgift 2.11, så försök gärna själv, eller titta på Headricks lösning.

7. **Bakgrundsladdning.** s.49. Teorin för "linjär dilaton" kommer vi inte att intressera oss jättemycket för, men den är ekvivalent med "boson med bakgrundsladdning Q" (dyker upp i supersträngen i kap.10) om man betraktar en generisk boson X och inte samlingen X^μ. Det betyder att X kopplar till metriken med en extra term $\Delta\mathcal{L}_Q = QX(z)R(z)$ i Lagrangefunktionen, där Q är den konstanta laddningen och R är världsytekrökningen. Men, är inte inte R topologisk enligt instuderingsfrågorna ovan, så $\Delta\mathcal{L}_Q$ inte bidrar till T_{ab}? Borde dessutom inte $R = 0$ om vi väljer gauge med plan metrik?

8. **Mer om bakgrundsladdning.** Läs gärna uppgift 2.7b om linjärdilatonteorin, men det är inte nödvändigt. Headrick slutar uppgift 2.7 med kommentaren att det verkar mystiskt att vikterna blir komplexa. Om du har lust att förstå det, läs McGreevys kurs String Theory 8.821 (2007) uppgift 3.2.b.

9. (Om du har läst **Symmetrier**, kan du koppla diskussionen om de tre generatorerna L_0 och $L_\pm$ i Polchinski kap 2.6 till den i Jürgens uppgift 5*, om representation med differentialoperatorer? I synnerhet, vad är skillnaden på Polchinskis algebra SL och Jürgens algebra $\mathfrak{sl}$?)

Kapitel 3

I allmänhet: läs översiktligt det som handlar om ränder (boundaries) för öppna strängar, t.ex. s. 95-96. Vi behöver det egentligen! Men det blir lite mycket om du skall gå igenom varje detalj, utan fokusera mer på slutna strängar i de "formella" kapitlen 3-5, med några undantag.

1. **Icke-orienterbarhet.** s. 100. Vad betyder det att en yta är "icke-orienterbar" (*unorientable*) ? Försök förstå vad en "crosscap" är.
   https://en.wikipedia.org/wiki/Cross-cap
2. **Gaugeval för metriken.** (3.3.2) "fiducial metric" = förankrings-metrik på svenska, dvs. en metrik som man sedan kan jämföra andra metriker med. Varför tror du det är användbart att införa det konceptet, och notationen $\hat{g}_{ab}$ med hatt?
3. **Elektrostatik.** s.85 "standard argument from electrostatics", vad är det?
4. **Kulturaspekten av konforma transformationer.** "Locally there is a bit of extra gauge freedom", det är den symmetrin som hela kapitel 2 handlade om, så det verkar vara viktigt att förstå. I synnerhet, hur definierar Polchinski "konform transformation" egentligen? Jämför i Glossary (ordlistan) i slutet av boken.
5. **Tensorer och differentialoperatorer.** Läs Headricks lösning till 3.2 och 3.3. Det är inte helt lätt att komma på det själv om man inte läst relevant matematik! Sammanfatta två huvudpoänger, t.ex. vad vet man om en spårlös symmetrisk tensor? Vad vet man om kovarianta derivator av tensorer med bara z-index och inga $\bar{z}$?
6. **Lokalt/globalt.** s.89. "locally on the worldsheet", det syftar på diskussionen i kap.5 och kap. 7 att det som står här i kap. 3 måste kompletteras dels med en diskussion om moduli (globala parametrar), dels en diskussion av globala ("stora") diffeomorfier.
7. **Kan världsyteteorin i strängteori ha central laddning?** Kap. 3.4. Poängen är ekvation (3.4.15). ("A slightly longer route" på s.93 kan vara svår att förstå, läs översiktligt.) Måste vi alltså kräva att centrala laddningen $c = 0$? (Det verkar först konstigt, dels för att vi ägnade tid åt c i kap.2, dels för att X^μ-CFT:n ju faktiskt har $c = D = 26$.)
8. **Spökverkan.** Slutklämmen i kap.3.3 är alltså (3.3.24): gaugefixering av banintegralen utan externa tillstånd (vakuumamplituden) leder till en Lagrangefunktion för b och c som väsentligen är $b\bar{\partial}c$, och vi identifierar den med bc-CFT:en på s. 50. Är vi inte klara då?
9. **Vertexoperatorer**. Kap 3.6. Diskussionen på s. 102 verkar ganska abstrakt, men enligt (3.6.5), normalordning i krökt (tvådimensionellt) rum, är den egentligen ganska konkret, jag tänkte göra det på tavlan. I (3.6.14) tycker jag det räcker att förstå hur det funkar för gravitonen, så sätt $a_{\mu\nu} = \phi = 0$. Vad är det du tappar då?
10. **Weyl-anomalier.** Hur är (3.7.12) konsistent med den tidigare diskussionen under (3.4.7)? Det verkar som att T^a_a på sin höjd får ha R, men i (3.4.7) har man mycket mer.
11. **Allmän relativitetsteori från strängteori.** "It is striking that Einstein's equation turns up in what seems to be a rather out-of-the-way place". Tänk igenom om du förstår det här stycket, det är väldigt djupt! I synnerhet, får man bara vakuum-Einstein-ekvationen $\mathbf{R}_{\mu\nu} = 0$, eller hela Einsteintensorn och $\mathbf{G}_{\mu\nu} = \kappa\mathbf{T}_{\mu\nu}$?
12. **Vilka strängteorier finns det?** s.117: försök sammanfatta den här diskussionen om generalisering av strängteorier i egna ord, i några meningar.

Kapitel 4

Du kan skippa punktpartikel-BRST om du vill. Om du läser det, kom ihåg att det bara finns en tidsvariabel τ på världslinjen och ingen rumsvariabel σ!

1. **OCQ: "Vi kör på känsla".** Vad menar Polchinski med meningarna under (4.1.2)? Läs klart nästa sida innan du svarar.

2. **H=0 alltid?** Henneaux och Teitelboim skriver på s.105 "must the Hamiltonian be zero for a generally covariant system"?

3. **Gaugefixering i klassisk mekanik?** Kan du tänka dig BRST i klassisk mekanik?

4. **Varför finns BRST-symmetri?** Är det inte lite konstigt att en rent bosonisk verkan som den bosoniska strängen (eller Yang-Mills-teori, för den delen) skall kunna ha en fermionisk symmetri?

5. **Kohomologi i matematik.** s.128: "Other examples of nilpotent operators are the exterior derivative in differential geometry and the boundary operator in topology". Vet du vad han pratar om för matematik nu, vad är kohomologi där?

Kapitel 5

1. **Inekvivalenta torusar.** Tänk igenom diskussionen av torusen i kapitel 5.1 ordentligt. Vad innebär en ändring av parametern τ (den s.k. Teichmüllerparametern) egentligen, är det något "fysikaliskt" eller en redundant parameter? Mer precist: innebär inte diff $\times$ Weyl-invarians att man kan ta varje metrik g_{ab} till $g_{ab} = \delta_{ab}$, dvs. utan parameter τ? En relaterad fråga: vad betyder "small mismatch"i första stycken i kap. 5.1?

2. **Banintegraler och spöken.** Missa inte *Note to the reader* på s.150. Poängen är följande. När man generaliserar diskussionen från kap.3.3. till vertexoperatorer och metrikmoduli måste man ta med insertioner av b (en för varje metrikmodulus, så 0 på sfären och 1 på torusen, som vi ser i kap. 7) och c (en för varje fixerad vertexoperator: 3 på sfären och 1 på torusen, som vi ser i kap. 6). Är det uppenbart att man måste ha någon faktor av b och c i funktionalintegralen?

3. **Varför τ-integrera?** Diskussionen i kap. 5.4 är väldigt allmän, men notera i alla fall följande poänger på s.161: integrerade vertexoperatorer producerar randtermer under BRST-variering, medan b-insertioner producerar insertion av T, som ger derivata med avseende på metrikmoduli t^k. Varför är det senare ytterligare en anledning varför man skall integrera över moduli t^k?

4. **Ändra metrik, ändra koordinat.** Diskussionen om Beltrami-differentialer är spännande, men huvudpoängen står i en mening: "we can use this to put the moduli for the metric and for the vertex operators on a more equal footing". Försök formulera det i egna ord.

Kapitel 6 [centralt]

Trädnivå ("tree level") är som du nog vet jargong från kvantfältteori som syftar på Feynmandiagram som ser ut som träd, alltså inga slutna "loopar". Trädnivå-approximationen motsvarar nollte ordningen (semiklassisk) approximation i en Taylorutveckling av en hel amplitud i (typisk energi gånger typisk tid)/Plancks konstant $\hbar$. I strängteori är det g_s^{-2} för slutna strängar och g_s^{-1} för öppna strängar.

1. **Stereografiska metriken på sfären.** (6.1.3). Beror r på z som $r^2 = |z|^2$, dvs är r radien i polära koordinater?

2. **CKV: Konform Killing-vektor**. Det kan vara lätt att tappa bort sig i diskussion om CKV på s. 167, och det är bra att gå tillbaka till ekvation (5.2.8) som Polchinski rekommenderar. Försök formulera diskussionen på s. 167 i egna ord, vad det här har att göra med Riemann-Roch-satsen. Som kuggfråga: vad är det för CKV på torusen? Som sagt, jämför tidigare kapitel.

3. **Vad är ett projektivt plan?**. Projektiva planet RP_2 är inte orienterat (se kap. 3 ovan):
   https://en.wikipedia.org/wiki/Real_projective_plane
   Vad är skillnaden på RP_2 och en "crosscap" (jfr. s. 100 i kap.3 i Polchinski, och fig. 7.2)? Den här Wikipediasidan börjar genast ta upp Möbiusbandet, och jag håller med att det är det lättaste sättet att försöka illustrera RP_2. Så varför tar inte Polchinski upp Möbiusbandet förrän kapitel 7?

4. **Veneziano, igen.** Sektion 6.4. är central. Är den klar? Till exempel, kan du beskriva i ord hur (6.4.5) skiljer sig från uträkningen vi gjorde med oscillatorer och CBH-formeln?

5. **Unitaritet.** Förstår du påståendet i (6.4.13)? I synnerhet, varför måste det finnas en pol?

6. **Trepunktsväxelverkan är lägesoberoende i CFT!** Förstår du diskussionen av Möbiusinvarians, vad säger han egentligen här, uttryckt i en mening? (Har du gått **Symmetrier**: Jämför gärna inlämningsuppgift 1d.)

7. **Exponentiering av matriser.** (Har du gått **Symmetrier**: Jämför gärna CBH-formeln (som mer logiskt kallas "BCH-formeln") i Fuchs & Schweigert sektion 9.8)

8. **Amplituder i kvantfältteori.** Ett stort pedagogiskt problem i sektion 6.5 är att studenter inte känner sig så hemma på kvantfältteoriamplituderna som de här strängamplituderna skall reducera till när strängarna är små. Till exempel, hur hade 3-punkt-S-matriselementet i strängteori (6.5.15) sett ut i Yang-Mills-teori? Är alla termerna med? För att komma igång, jämför med Yang-Mills-3-punkt-vertex. I Peskin & Schroeder är det uppgift 17.4 (uppgiften före är 4-punkts-funktionen!). Schwartz gör det med lite mer moderna metoder än Peskin & Schroeder. Jämför strukturkonstanterna i t.ex. Schwartz (25.33) och Schwartz fantastiska bevis i kap. 27.5.1-2: *Gauge theories based on Lie algebras are the unique interacting theories with massless spin-1 particles.*

Kapitel 7 [centralt]

Feynmandiagram med slutna kurvor (loopar) är kvantkorrektioner, alltså mer än lägsta ordning i $\hbar$. Den första ordningen är en loop. I strängteori är det g_s^0 för både slutna och öppna strängar, alltså Eulerkarakterik $\chi = 2 - 2g = 0$.

1. **Metrikmoduli.** Kan du nu gå tillbaka till kapitel 5.1 och ekvation (5.3.2) och förstå vad Polchinski menade med metrikmoduli t^k? Vad är det för torusen? Vad är CKV?

2. **Mer om ickeorienterbarhet.** Slå upp:
   https://en.wikipedia.org/wiki/Klein_bottle
   Det de kallar "*figure 8 immersion*", verkar inte den undvika att skära sig själv (*self-intersecting*)?

3. **Kvantkorrektioner till Veneziano: exponentialkorrelatorer på enloopsnivå.** Ekvation (7.2.4): hur kan faktorn $2\pi/\partial_\nu \vartheta_1$ bestämmas av (7.2.1) när den inte beror på w?

4. **Kunde Leopold Kronecker (1823-1891) strängteori?** *"Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk"*. Försök förstå påståendena i följande två matematiska formler, Kroneckers två gränsformler:
   https://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker_limit_formula
   Den första är en viktig del av (men inte hela) enloops-tillståndssumman för bosonisk strängteori. Den andra är för supersträngteori. Den första gränsformeln är bevisad i Nakaharas bok (kap. 14.3 i min upplaga), har du tillgång till den så titta där!

5. **Lite om beviset av gränsformlerna.** Beviset av Kroneckers två gränsformler av matematikern Carl Siegel[5] som Wikipedia-sidan ovan syftar på är uttryckt i s.k. Epstein-zeta-funktioner. Vi har korrigerat Siegels indiska anteckningar lite i appendix E.3 (s.46) i https://arxiv.org/abs/1407.0027. Detaljerna är inte viktiga för den här kursen, men kan du åtminstone förstå notationen i ekvation (226) och (227) så du ser ungefär hur Kronecker-Eisensteinfunktionen E och Epsteinfunktionen ζ är relaterade, t.ex. hur definierar Siegel en isotrop vektor $\mathbf{w}$ givet en kvadratisk form $\mathbf{Q}$, och vad är en *Kugelfunktion*?

6. **Skalärer på enloopsnivå.** Uträkningen av skalärkorrelatorer på torusen är en av de mest centrala uträkningarna, kanske i teoretisk fysik överhuvudtaget. Men vad är ω nu igen?

7. **Thetafunktioner.** Kap 7.3. Hur kan sumrepresentationen av ϑ-funktionerna vara ekvivalent med produktrepresentationen? Här är en observation som ligger till grund för beviset. Prova att multiplicera ut $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$
(t.ex. med `expand(mul(1-x^n,n=1..N))` i Maple, prova några värden på N upp till 30). Flera termer tar ut varandra, bara man inte trunkerar för tidigt. Hur många av potenserna upp till x^{30} överlever?

8. **Onödigt stora gaugegrupper?** Jag tänkte inte gå igenom 7.4 i detalj för det är bosonisk strängteori, utan spara det till supersträngteori. Men försök läsa texten, särskilt det om vakuumamplituden i allmänhet och försök förstå hur $SO(8192)$ dyker upp (som alltså kommer att vara $SO(32)$ i supersträngteori).

9. **Tillståndstäthet och entropi.** På s. 213 tar Polchinski gränsen för hög konform vikt ("högt upp i spektrat") och sluter sig till att centrala laddningen helt bestämmer tillståndstätheten. Det anses lite överraskande eftersom centrala laddningen är en ganska "grov" egenskap medan tillståndstätheten säger något mer detaljerat om spektrat och i synnerhet om entropin. (Om du inte vet hur man får entropi från tillståndstäthet, se mina statistisk-fysik-anteckningar på It's.) Den här gränsen används därför för svarthålsentropi i kap.14, och används igen för hög temperatur i kap 9.8 (överkurs, men ta gärna en titt). För att kolla om du förstår: hur kan både $q = e^{-2\pi\ell}$ och $q = e^{-2\pi/\ell}$ i det här stycket?

10. **Den så kallade "teknikaliteten".** Polchinski gillar att explicit separera det han tycker är viktigt vid ett tillfälle från det som är mindre viktigt vid det tillfället. Det är en jättebra pedagogisk poäng i ett så brett område som strängteori. Å andra sidan kan det skapa problem; här säger han att det som följer från (8.2.21) är en "teknikalitet", alltså lite en känsla av hårklyveri, men sedan i (10.3.15) kommer vi att behöva precis det hårklyveriet och det kommer att vara djupt och viktigt. För att förbereda det: förstår du varför bara σ^1 förekommer i högerledet i (8.2.21)? Kan du t.o.m. räkna ut det från (8.2.16a) och standardkommutatorn (2.7.5a)?

Kapitel 8 [centralt, utom 8.5]

1. **Kaluza-Klein-reduktion på cirkel.** Försök förstå hur Ricciskalären (8.1.8) följer från metriken.

2. **Jacobi kontra Fourier**. Kan du förstå (8.2.10) som en transformation av en ϑ-funktion?

3. **Orbifalder.** Det är ett helt kapitel om det (kap. 16), så tjuvtitta gärna där. En intressant fråga är, vad är Eulerkarakteristiken χ för t.ex. en T^4/Z_N, t.ex. $N=3$ som Polchinski ritar?

4. **Tvistade strängar.** Försök göra en skiss av diskussionen på sidan 259, ekvation (8.5.13).

5. **Hur flyttar man på ett D-bran?** (8.6.15) är viktig. Vad betyder det egentligen att byta tecken på X_R i T-dualitet — varför kan man göra det?

[5] inte att förväxla med strängteoretikern Warren Siegel

6. **D-bran och LIGO.** Skissa ett strängdiagram (på trädnivå) där en gravitationsvåg träffar ett D-bran och det oscillerar, som han beskriver på s.269.

7. **D-bran och gravitoner.** Skissa Feynmangrafen med gravitonutbyte i ekvation (8.7.25).

Appendix A

1. **Banintegraler kontra operatorer**. s.332: I strängteori har man inte bara trajektorier utan hela världsytor, så man kan *"cut the surface open along many different closed curves; different choices give different Hilbert space representations"*. Försök förstå i stora drag hur det relaterar till kommentaren om världsytedualitet på s.287. (Diskussionen i kap.9 är väldigt allmän, men man ser exempel på det redan i Venezianoamplituden, som Veneziano konstruerade genom att tvinga den att uppfylla världsytedualiteten.)

2. **Är vanlig kvantmekanik divergent?**. Svaret är ja, fast som vanligt är det inget problem. s.340: Kommentaren är instruktiv! Men förstår du vad han menar?

Kapitel 10 [centralt, men utmanande]

1. **Periodicitet hos fermioner** Påminn dig om den avbildningen $z = e^{-iw}$ från fig. 2.3, där z är "sfärkoordinaten" och w cylinderkoordinaten $w = \sigma^1 + i\sigma^2$. (Varning: jämför ekvation (2.1.12) och (2.6.4)!) Vad är ν för periodiska fermioner? För antiperiodiska? Vad kallas de och varför är antiperiodisk egentligen tillåtet? Och, Polchinski skriver "cylinder", betyder det loopnivå här?

2. **NS-summor**. Vad menas med att summan är "över heltal" om $\nu = 1/2$?

3. **Konform transformation av fermionerna**. Förstår du varför man måste ha med rottecknet i transformationen?

4. **Förgrening**. Vad menar Polchinski med att det är en förgreningslinje (*branch cut*) för R-fermioner? Varför skulle det kunna vara ett problem?

5. **Dubbleringstricket.** Diskussionen för öppna strängar kring (..) kallas dubbleringstricket (*doubling trick*). Vad är det som dubbleras?

6. **Kiralitet.** "sträng-kiralitets-operatorn" $e^{\pi i F} = (-1)^F$ är en generalisering av γ^5 till hela strängspektrat. Men hur ser man att det verkligen är kiralitet; den masslösa vektorn enligt kap.10 har en ψ-oscillator i sig. Med andra ord, finns det någon koppling mellan "fermion på världsytan" och "fermion i rumtiden"? (Tips: han inför också **F** med fetstil, rumtidsfermiontalet.)

7. **Bosonisering.** Det är rätt svårt att förstå vad $\psi \sim e^{iH}$ egentligen betyder: hur kan exponentiering av en boson ge en fermion? Det kan vara värt att nämna att det *faktiskt är* överraskande och djupt. Här är en konkret fråga: när vi bosoniserar i R-sektorn har vi halvor i exponenten, $\Theta \sim e^{\pm\frac{1}{2}iH}$. Det känns lite mer "fermioniskt". Varför är det ingen halva i $\psi \sim e^{iH}$, hur ser vi enkelt att det är en fermion? Skall man bli orolig för e^{ipX} i våra tidigare vertexoperatorer, det är väl en bosonisk operator?

8. **Spektralt flöde.** Det här vet jag inte om jag riktigt förstår själv! Jag tycker egentligen att om $\nu = +1/2$ som i NS-sektorn så ser det ut som att exponenten är noll, men jag hade väntat mig att det skulle vara konsistent med $\psi \sim e^{iH}$.

9. **Spinn-statistik-satsen.** Kopplingen mellan spinn (halvtaligt/heltaligt) och statistik (fermion/boson) ges av en sats som bevisades i kvantfältteori av Pauli för länge sedan. Varför säger Polchinski att ψ^μ och $e^{-\phi}$ båda verkar "problematiska"? Varför är det ändå OK i strängteori?[6]

[6] Det här kallar Polchinski "rather technical", men det är konceptuellt ganska viktigt i kap.12; jämför hans tidigare

Kapitel 12 [centralt, men utmanande]

1. **Verkan.** han ger nästan inga detaljer, så läs igenom men förvänta dig inte att förstå. En intressant fråga är de olika definitionerna av RR-fälten F (den ena med tilde, $\tilde{F}$). Vad skiljer definitionerna?

2. **Superfält.** Notera kommentarer om att någon verkan är "unik" tack vare supersymmetri, men har ger ingen kommentar om hur man skulle kunna bevisa det. Första steget till bevis vore att skriva ut fermionerna! Men om man hade skrivit ut dem ser det väldigt komplicerat ut. Så hur gör man supersymmetri manifest, som man gör t.ex. Lorentzinvarians manifest? Svar: med *superfält*, förstås. De introducerades av Salam och Strathdee redan 1974.[7] Det här går att förstå och är användbart, men inte nödvändigt för vår kurs. En snygg aspekt är att man får gravitonvertexoperatorn $\mathcal{V}^0$ i den s.k. 0-bilden ganska naturligt (se mina stränganteckningar). Vad kallar Polchinski extratermerna i $\mathcal{V}^0$ utöver ∂X?

3. **Superspöken.** En annan är att man får nya spöken väldigt billigt: man får $\beta\gamma$-teorin från supersymmetrisering av bc-teorin. Hur hade du kunnat gissa att det skulle kunna vara så från diskussionen av bc och $\beta\gamma$ i kapitel 2?

4. **Anomalier**: P&S har tre varianter av uträkningen i abelsk gaugeteori (QED), sedan en för ickeabelsk gaugeteori. Schwarz gör detsamma i 30.1-30.3, och 30.4 diskuterar han Standardmodellen. Hur var det, är standardmodellen anomalifri? Om man tar bort toppkvarken?

5. **Amplituder**: det står inte så mycket precis hur man gör, för han syftar mycket på boken av Green-Schwarz-Witten, som har en uppdaterad version i Becker-Becker-Schwarz kap 5.4. Vi skall göra några exempel. Ett stort pedagogiskt problem är att studenter inte känner så hemma på kvantfältteoriamplituderna som de här skall reducera till, se kap.6 ovan, minns du om det var någon term av ordning α' i 3-punkts-amplituden för gaugebosoner i bosonisk strängteori?

Försök så gott du kan att skumma igenom det här kapitlet.

Kapitel 13

1. **Dualitet finns.** Dualitet är numera *experimentellt väletablerat* i materialfysik i i låg dimension, läs gärna t.ex.
   http://physics.aps.org/articles/v9/72
   Är det samma McGreevy som dyker upp i strängteori, t.ex. i mina introanteckningar?

2. **D-bran-laddning.** Jämför diskussionen om D-bran-laddningen med den i kapitel 8 för bosonisk strängteori, som är mer detaljerad och förståelig. Varför hänger laddningen och spänningen ihop med en Φ-beroende faktor?

3. **Uppvärmning för svarta hål.** Det är viktigt med diskussionen om #ND=4 för svartahålsentropin i kap.14. Som jag bara kommer att skissa. Var kom verkan (13.5.21) ifrån?

---

kommentar om "technicality" i kap. 8! Det är egentligen inte så konstigt att det som kan hänföras till teknikaliteter ur ett grundläggande perspektiv kan vara centralt ur ett mer avancerat perspektiv, det är lätt att komma på sådana exempel i kvantfältteori, som BHPZ eller LSZ, eller t.o.m. härledning av fotonpropagatorn, som Peskin och Schröder till att börja med skjuter på senare kapitel.

[7] Vill du verkligen veta det finns det massor av böcker om superfält i $D = 4$. Wess & Bagger är standardverket, men inte så lättläst: jag gillar de tre böckerna Terning och Dine och Baer-Tata (den sista är mest fenomenologisk). Men det lustiga är att supersymmetri inte bara uppfanns i strängteori, det är enklast i $D = 2$. Så om du skulle börja här i Polchinski kanske det inte är någon dålig idé — jag har inte provat, själv började jag lära mig om superfält genom att räkna igenom massor av uppgifter i Wess & Bagger. (Du kan gärna få mina lösningar om du vill.) Men nuförtiden finns det nog mer effektiva sätt, som t.ex. Terning. Eller Siegels gratisbok "Fields" kanske går att lära sig ur. De här böckerna gör inte så mycket supergravitation. För det är Freedman & van Proyens bok bra, men de använder inte superfält alls!

Kapitel 14

1. **Svartahålsentropi.** Hur hänger Polchinskis uttryck $S = 2\pi A$ samman med Hawkings $S = A/4$?

Appendix B

Kapitlet är skrivet som en appendix så det är inte riktigt tänkt att man skall "lära sig" från det, utan har du någon koll på spinorer och gammamatriser γ^μ i $D = 4$ så är tanken att Γ^μ är en naturlig generalisering till godtyckligt D.

(Har du läst **Symmetrier**, så läs kap. 20.9 i Fuchs & Schweigert, där den centrala supersymmetriekvationen $\{Q, Q\} = P$ förekommer.)

1. **Stegoperatorer.** Men, är generaliseringen till godtyckligt D så värst naturlig? I synnerhet, han skriver gammamatriserna med stegoperatorer Γ^+, betyder det att det inte går att prata om klassisk fysik här?

2. **Reducibla spinorrepresentationer.** Bekanta dig med tabellen över villkor (Weyl, Majorana) man kan sätta på spinorer i olika dimensioner, och hur stora gammamatriserna är. Gissa: är den här periodiciteten något allmänt?

3. **Sönderläggning.** Det är lite representationsteori också, om sönderläggning (*decomposition*). Förstår du exemplen? (Försök gärna relatera det till **Symmetrier**-kursen om du läst den, t.ex. inlämningsuppgift 5b om $SO(5)$.)

Kompendium

1. (Har du läst **Symmetrier**, så läs om Baker Lemma 3.25, som är relevant i orbifalder.)