Vad är kvantfältteori? Lösningsskisser till övningar

Marcus Berg, 2022-09-24

1 Lorentz-invarians

Övning 1: stoppa in $p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu}$ från

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{x'^{\mu}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda^{\mu}{}_{\nu}} \underbrace{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{x^{\nu}} \tag{1.1}$$

och visa att $p'_{\mu} p'^{\mu} = p_{\mu} p^{\mu}$, dvs. invariant. Tips: i specialfallet $p'_0 = \gamma(\frac{E}{c} - \frac{v}{c} p_x)$, $p'_x = \gamma(\frac{E}{c}\left(-\frac{v}{c}\right) + p_x)$, bilda $p'_{\mu} p'^{\mu} = -(p'_0)^2 + (p'_x)^2$.

Lösning: För att spara skrivande, inför $v/c = \beta$, och skriv inte ut $E/c = p_0$.

$$\begin{aligned} p'_{\mu} p'^{\mu} = -(p'_0)^2 + (p'_x)^2 &= -\gamma^2 \left(p_0 - \beta p_x\right)^2 + \gamma^2 \left(p_0(-\beta) + p_x\right)^2 \\ &= \gamma^2 \left(-(p_0^2 - 2p_0\beta p_x + (\beta p_x)^2) + (-p_0\beta)^2 + 2(-p_0\beta)p_x + p_x^2\right) \\ &= \gamma^2 \left(-p_0^2 + 2p_0\beta p_x - \beta^2 p_x^2 + p_0^2\beta^2 - 2p_0\beta p_x + p_x^2\right) \\ &= \gamma^2 \left(-p_0^2 - \beta^2 p_x^2 + p_0^2\beta^2 + p_x^2\right) \\ &= \gamma^2 \left(-p_0^2(1-\beta^2) + p_x^2(1-\beta^2)\right) \\ &= -p_0^2 + p_x^2, \end{aligned} \tag{1.2}$$

eftersom $\gamma^2(1-\beta^2) = (1-\beta^2)/(1-\beta^2) = 1$. Så $p'_{\mu} p'^{\mu} = p_{\mu} p^{\mu}$.

Kommentar: det blir snyggare i hyperbolisk representation, så här. Introducera hyperboliska funktionerna $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, $\tanh x = \sinh x / \cosh x$. De uppfyller "hyperboliska ettan":

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right) = 1\ .$$

Ersätt nu hastigheten v med en ny variabel φ enligt $\tanh\varphi = v/c$. (Variabeln φ kallas *rapiditet*, för att skilja det från hastighet, men det säger något om hastighet.) Uttryckt i φ är Lorentz-faktorn

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{1 - \tanh^2\varphi} = \frac{\cosh^2\varphi}{\cosh^2\varphi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sinh^2\varphi}{\cosh^2\varphi}} = \frac{\cosh^2\varphi}{\cosh^2 - \sinh^2\varphi} = \cosh^2\varphi \tag{1.3}$$

så vi har

$$\begin{aligned} p'_0 &= \gamma(p_0 - \frac{v}{c} p_x) = \cosh\varphi(p_0 - (\tanh\varphi)p_x) = (\cosh\varphi)p_0 - (\sinh\varphi)p_x && (1.4) \\ p'_x &= \gamma(p_0\left(-\frac{v}{c}\right) + p_x) = \cosh\varphi(p_0(-\tanh\varphi) + p_x) = -(\sinh\varphi)p_0 + (\cosh\varphi)p_x\ . && (1.5) \end{aligned}$$

Det här är så likt rotation (ta bara bort "h") att det kallas *hyperbolisk rotation*. Då kallas rapiditeten φ även *hyperbolisk vinkel*. Med det här maskineriet blir de 6 raderna ovan 2 rader:

$$\begin{aligned} p'_{\mu} p'^{\mu} = -(p'_0)^2 + (p'_x)^2 &= -((\cosh\varphi)p_0 - (\sinh\varphi)p_x)^2 + (-(\sinh\varphi)p_0 - (\sinh\varphi)p_x)^2 && (1.6) \\ &= -(\cosh^2\varphi \cdot p_0^2 + \sinh^2\varphi \cdot p_x^2) + \sinh^2\varphi \cdot p_0^2 + \cosh^2\varphi \cdot p_x^2 = -p_0^2 + p_x^2 \end{aligned}$$

där jag i och för sig inte skrev ut att korstermerna tar ut sig, men ändå.

2 Lagrange-mekanik

Övning 2: Istället för gravitationell energi $V = mgz$, ta harmonisk oscillator $V = \frac{1}{2}kx^2$ i Euler-Lagrange-ekvationen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{2.1}$$

och visa att det ger Newtons andra lag $F = ma$. (Massan m rör sig i x-led nu, så jag var tvungen att ersätta z i exemplet med tyngdkraft med x.)

Lösning: Rörelseenergin i x-led är $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, så

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right) = m\dot{x} \tag{2.2}$$

och tidsderivatan av det är $m\ddot{x} = ma$, där a är accelerationen i x-led. Andra termen i ekv. (2.1) är

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right) = -kx \tag{2.3}$$

så (2.1) blir $ma + kx = 0$, dvs. med $F = -kx$ (Hookes lag) är Euler-Lagrange-ekvationen $F = ma$. Det är alltså ingen ny fysik i Lagrange-funktionen L, bara ett smidigt sätt att packa ihop Newtons andra lag.

Kommentar 1: att L är smidigare än $F = ma$ är inte så uppenbart här! Men som jag skriver i texten, notera att $\vec{F} = m\vec{a}$ i tre rumsdimensioner är en vektorekvation, alltså tre komponentekvationer, medan L fortfarande är en funktion.

Kommentar 2: att man måste "ersätta" z med x verkar lite påhittigt. Det är för att jag bara skrev ut en dimension. När vi tar med alla fyra rumtidsdimensionerna från början behöver man inte vara påhittig. Sätt $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ med ekvationen i texten

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \qquad \left(\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \tag{2.4}$$

så är de partiella derivatorna, när man skriver ut dem,

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial(ct)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,, \quad \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial z}\,, \tag{2.5}$$

och summan över $\mu = 0, 1, 2, 3$ är, när man skriver ut den:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \varphi)} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \varphi)} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_y \varphi)} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_z \varphi)}\,. \tag{2.6}$$

Våra två enkla exempel (1. massa i tyngdkraftfält, 2. harmonisk oscillator, alltså massa på fjäder) motsvarar nu specialfall då en av termerna i ekv. (2.6) är nollskild. Man behöver inte "ersätta" något.

Vi kommer inte att behöva jobba direkt med långa uttryck som ekv. (2.6). Men det kan vara bra att ha sett det, för att ha känslan att det är rätt mycket som är smidigt ihop-packat här. När man vänjer sig att jobba med kompakta uttryck som det första i ekv. (2.6) får de ett "eget liv", och man behöver inte alltid "packa upp" dem för att räkna ut saker.

3 Verkans-principen

Övning 3: Visa att vägen med $\Delta S = 0$ (verkan S ändras inte om man varierar vägen lite) löser Euler-Lagrange-ekvationerna (2.4). (s.30-31 i McMahon).

Lösning: Se McMahon. Jag kan gå igenom det här för någon som är intresserad och inte har McMahon. Men detaljerna är inte så viktiga just nu. Det räcker att läsa Feynmans intuitiva argument som jag länkar till i texten. Verkansprincipen är alltså att Euler-Lagrange-ekvationerna uppstår från villkoret att verkan S har extrempunkt.

Kommentar: Här är en kort version av Feynmans argument. Betrakta en väg i närheten av vägen som uppfyller Euler-Lagrange-ekvationerna. Inför en parameter p som varierar vägen lite grand, där vägen själv betecknas $p = 0$ och vägen deformeras lite åt vänster om $p < 0$ och åt höger om $p > 0$. Villkoret $\Delta S = 0$ betyder att att antingen blir verkan S större åt bägge hållen (både $p < 0$ och $p > 0$) eller så blir den mindre åt bägge hållen. Första fallet är om det är minimum, andra om det är maximum. Villkoret $\Delta S = 0$ är alltså bara att det är extrempunkt.

Det låter som derivatavillkor för maximum och minimum. Så varför säger man inte bara det? För att det isåfall måste vara en generaliserad mening av begreppet derivata. S är inte en "funktion av vägen": vägen bestäms ju själv av en funktion av läget. Verkan kan på sin höjd betraktas som en "funktion av parametern p", men det tar lite arbete att definiera, för det finns oändligt många sätt att deformera vägen: skall den böjas av lika mycket överallt? Eller kanske en sinus kring ursprungliga vägen? Om man lyckas kan man tänka sig en derivata med avseende på parametern p. Verkan S kallas då en *funktional* av vägen, och då pratar man om *funktional-derivata*. Motsvarande *funktional-integral* kommer vi att återkomma till.

4 Rotationsgruppen SO(3) från dess Lie-algebra so(3)

Övning 4: För exemplet $A = L_z$ från Wikipedia-sidan, räkna ut exponentieringen R.

Lösning: Med givna matrisen (Wikipedia använder inte fetstil, det gör jag):

$$\mathbf{L}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

skall vi tydligen beräkna matris-summan av matris-potenser $e^{\theta \mathbf{L}_z} = \mathbf{I} + (\theta \mathbf{L}_z)^2 + \frac{1}{2!}(\theta \mathbf{L}_z)^2 + \ldots$, taylorutvecklingen av exponentialfunktionen. Vi behöver alltså potenser av $\mathbf{L}_z$. Först 2:a-potens:

$$\mathbf{L}_z^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

sedan 3:e-potens som $\mathbf{L}_z^2$ gånger $\mathbf{L}_z$ (eller tvärtom, det spelar ingen roll):

$$\mathbf{L}_z^3 = \mathbf{L}_z^2 \mathbf{L}_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

och det får räcka för tillfället. Vi får, till och med 3:e ordningen i θ, att $e^{\theta \mathbf{L}_z}$ är:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \theta^2/2 & -(\theta - \theta^3/3) & 0 \\ \theta - \theta^3/3 & 1 - \theta^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Med lite vilja kan vi identifiera $1 - \theta^2/2 \approx \cos\theta$ och $\theta - \theta^3/3 \approx \sin\theta$, så det här är rotationsmatrisen $R(\theta)$. Är man lite mer skeptiker än så, vilket är hälsosamt, inbjuder jag hjärtligast till att räkna vidare till lite högre ordning. Eller bara köra `MatrixExp` i Mathematica.

5 Det går att ange $|\vec{\mathbf{L}}|$ och $\mathbf{L}_z$ samtidigt.

Övning 5: med so(3)-matriserna $\mathbf{L}_x$, $\mathbf{L}_y$, $\mathbf{L}_z$ i förra övningen, visa att $[\mathbf{L}_x^2 + \mathbf{L}_y^2 + \mathbf{L}_z^2\,,\,\mathbf{L}_z] = 0$.

Lösning: Vi har redan $\mathbf{L}_z^2$ i förra uppgiften, så vi behöver $\mathbf{L}_x^2$ och $\mathbf{L}_y^2$:

$$\mathbf{L}_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

och i y-led

$$\mathbf{L}_y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

så vi har att

$$\mathbf{L}_x^2 + \mathbf{L}_y^2 + \mathbf{L}_z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \tag{5.3}$$

Den sista matrisen är proportionell mot enhetsmatrisen $\mathbf{I}$, som kommuterar med alla matriser.

Kommentar: En matematisk sats från linjär algebra säger att vi kan specificera egenvärde för kommuterande matriser i samma bas, t.ex. egenvärde för $\vec{\mathbf{L}}^2 = \mathbf{L}_x^2 + \mathbf{L}_y^2 + \mathbf{L}_z^2$ i bas av egenvektorer för $\mathbf{L}_z$. Men eftersom $\vec{\mathbf{L}}^2 = -2\mathbf{I}$ är såpass enkel här behöver vi ingen sats, det funkar som följer. Konventionellt pratar man om egenvektorer för $i\mathbf{L}_z$ (som är hermitesk) inte $\mathbf{L}_z$ (som är anti-hermitesk). För $i\mathbf{L}_z$ är egenvärdena $0, -1, +1$ (testa!), och för $(i\vec{\mathbf{L}})^2 = 2\mathbf{I}$ är egenvärdena för vilka tre basvektorer som helst alltid uppenbarligen 2. De tre fallen motsvarar vektorer som har längd $\sqrt{2}$ och pekar antingen $45°$ upp, $45°$ ner, eller $0°$ upp/ner, dvs. utefter xy-planet. Konventionellt anger kvanttalet ℓ självt max-z-komposanten, inte längden som man skulle kunna tro, det här fallet är alltså $\ell = 1$.

6 Heisenbergs kommuteringsrelation, uttryckt i stegoperatorer

Övning 6: Visa från Heisenbergs $[\mathbf{X}, \mathbf{P}] = i\hbar$ att $[\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+] = 1$.

Lösning:

$$[\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+] = \tag{6.1}$$

Kommentar:

7 Heisenbergs kommuteringsrelation kontra Schrödingers vågfunktion

Övning 7: visa att $\mathbf{a}^- \phi_0 = 0$ ger $\phi_0(x) = e^{-\omega x^2/(2\hbar)}$, och att $\phi_1 = \mathbf{a}^+ \phi_0$, $\phi_2 = \mathbf{a}^+ \phi_1$ också är lösningar.

Lösning: Normeringsfaktorn i definitionen av $\mathbf{a}^-$ är irrelevant för första frågan $\mathbf{a}^- \phi_0 = 0$, så vi har

$$0 = (\mathbf{P} - i\omega \mathbf{X})\phi_0 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\phi - i\omega x \phi \tag{7.1}$$

Det är viktigt att se skogen för träden: deriverar vi en funktion av formen e^{-ax^2} med avseende på x^2 så får vi ner en faktor $-2ax$ som inre derivata, enligt kedjeregeln. Så det visar principiellt att e^{-ax^2} är en lösning till $\mathbf{a}^- \phi_0 = 0$. Vi har då utan mer uträkning att

$$\mathbf{H}\phi_0 = \hbar\omega(\mathbf{a}^+ \underbrace{\mathbf{a}^-}_{\text{ger } 0} + \tfrac{1}{2}\mathbf{I})\phi_0 = \hbar\omega \cdot \tfrac{1}{2}\phi_0 \tag{7.2}$$

så ϕ_0 uppfyller tidsoberoende Schrödingerekvationen $\mathbf{H}\phi_0 = E_0 \phi_0$ med lägsta energin $E_0 = \hbar\omega/2$, som representerar grundtillståndet.
För att få till konstanterna behöver vi alltså sätta $\hbar \cdot 2a = \omega$, alltså $a = \omega/(2\hbar)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{-\omega x^2/(2\hbar)} = -\frac{\omega}{\hbar} x e^{-\omega x^2/(2\hbar)} \quad \Rightarrow \quad \left(\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \omega x\right) e^{-\omega x^2/(2\hbar)} = 0\ . \tag{7.3}$$

Men är lösningen $\phi_0(x) = e^{-\omega x^2/(2\hbar)}$ unik? För det första har jag betraktat det som en differentialekvation i en variabel x, så det kan förekomma en konstant som beror på de andra variablerna y, z. Det visar sig (enligt separationsmetoden) inte vara något problem. Om vi kräver att vågfunktionen totalt skall vara normerad (ge 100% sannolikhet att vara någonstans) så bestämmer det konstanten.

Kommentar: Randvillkoret att vågfunktionen inte skall gå mot oändligheten för $x \to 0$ ger en asymmetri mellan $\mathbf{a}^-$ och $\mathbf{a}^+$: varianten $\mathbf{a}^+ \phi_0 = 0$ har lösningen $e^{\omega x^2/(2\hbar)}$, som är oacceptabel. Så ϕ_0 är grundtillstånd, och det går inte att vända på det och stega nedåt från grundtillståndet.

8 Om elektrodynamik hos kroppar i rörelse

(Det bör inte undgå någon att ovanstående är titeln på Einsteins artikel från 1905 där han introducerar speciell relativitetsteori.)

Övning 8: Visa att $F_{\mu\nu}\eta^{\mu\rho}F_{\rho\sigma}\eta^{\sigma\nu} = \mathrm{tr}(F\eta F\eta) = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2/c^2)$. Varför är Einstein nöjd nu?

Lösning:

$$\mathrm{tr}(F\eta F\eta) = \tag{8.1}$$

Kommentar:

9 Dirac-ekvationen väljer ut det fysikaliska i elektronfältet

Övning: visa att Dirac-ekvationen för u, med γ från Wikipedia, sätter $u_3 = u_4 = 0$.

Lösning:

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \tag{9.1}$$

Kommentar: