

Inledande modern fysik Del 2

Avancerat Kompendium: Relativitetsteori och partikelfysik

Marcus Berg

Det här kompendiet utgör **frivillig fördjupning** för kursmomentet Del 2. Detaljerna här kommer inte på tentan, men det kan nog hjälpa lite att läsa igenom det innan tentan när du redan känner dig hyfsat säker i övrigt på det vi pratat om. Referens: Tong [1], s. 107 och framåt.

Innehåll

1	Relativistisk energi och rörelsemängd, kontra hastighet	1
2	Sönderfall och mer relativistisk kinematik	2
2.1	Partikel 1:s vilosystem: MC-systemet	3
2.2	Partikel 2:s vilosystem	5
2.3	I laboratoriesystemet	6
2.4	Sönderfall och inre struktur	7
3	Mer om kvantfält: vågfysik och kvantfysik ger antimateria	8
4	Lorentztransformationerna, matriser och grupper	9
5	Loopdiagram: Higgspartikeln	10

1 Relativistisk energi och rörelsemängd, kontra hastighet

Komponenterna $p^\alpha = (E/c, \mathbf{p})$ av en 4-vektor är oftast bra som de är: energi och 3-rörelsemängd. Men om man envisas med att jobba med 3-hastighet \mathbf{v} istället kan man sätta in uttrycken för de relativistiska energierna och rörelsemängderna

$$E = \gamma mc^2, \quad \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}, \quad (1.1)$$

där v^2 ju förekommer i gammafaktorn γ . Från formlerna (1.1) följer att

$$\frac{\mathbf{p}c}{E} = \frac{\gamma m\mathbf{v}c}{\gamma mc^2} = \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (1.2)$$

Det här är en trevlig identitet som ger följande alternativa sätt att bevisa ekvivalens mellan de två vanligaste formerna av energin E (som du redan bevisat i en uppgift). Vi börjar från $E = \gamma mc^2$ och kvadrerar:

$$E^2 = \gamma^2 m^2 c^4 = \frac{1}{1 - \mathbf{v}^2/c^2} m^2 c^4 \quad (1.3)$$

så

$$E^2 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} E^2 = m^2 c^4 \quad (1.4)$$

och enligt (1.2) är $\frac{\mathbf{v}^2}{c^2} E^2 = \mathbf{p}^2 c^2$, så vi har tagit oss till den ursprungliga formen

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (1.5)$$

Man kan vid olika tillfällen i speciell relativitetsteori oroa sig för att något kommer att leda till en motsägelse, då är det bra att prova. Så vi gör samma sak med $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ som vi gjorde med energin, då får man

$$\mathbf{p}^2 = \frac{1}{1 - \mathbf{v}^2/c^2} m^2 \mathbf{v}^2 \quad (1.6)$$

$$\mathbf{p}^2 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \mathbf{p}^2 = m^2 \mathbf{v}^2 \quad (1.7)$$

$$\mathbf{v}^2 \left(\frac{\mathbf{p}^2}{c^2} + m^2 \right) = \mathbf{p}^2 \quad (1.8)$$

$$\mathbf{v}^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{\frac{\mathbf{p}^2}{c^2} + m^2} = \frac{\mathbf{p}^2 c^4}{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} = \frac{\mathbf{p}^2 c^4}{E^2} \quad (1.9)$$

och nu är vi tillbaka till (1.2). Så allting passar ihop. Eller åtminstone det här!

2 Sönderfall och mer relativistisk kinematik

Betrakta ett sönderfall

$$\text{partikel 1} \rightarrow \text{partikel 2} + \text{partikel 3} \quad (2.1)$$

med 4-rörelsemängderna

$$p_1^\alpha = (E_1/c, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\alpha = (E_2/c, \mathbf{p}_2), \quad p_3^\alpha = (E_3/c, \mathbf{p}_3). \quad (2.2)$$

Vi vet att 4-rörelsemängden är bevarad i alla koordinatsystem (i motsats till 3-rörelsemängden):

$$p_1^\alpha = p_2^\alpha + p_3^\alpha \quad (2.3)$$

som är ekvivalent med de fyra ekvationerna (om man räknar komponenter)

$$E_1 = E_2 + E_3 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3. \quad (2.5)$$

Låt mig först påminna om vad det betyder att E och \mathbf{p} inte är bevarade för alla observatörer, trots att jag säger att de är "ekvivalenta" med 4-rörelsemängdens bevarande (2.3). Det är samma påstående som att om jag *roterar* mina koordinater en vinkel θ så har komponenterna av rörelsemängderna \mathbf{p}_i olika värden i de två koordinatsystemen (x, y) och (\bar{x}, \bar{y}) före och efter rotation, så vad som är p_{1x} och p_{1y} har ändrats men vektoridentiteten (2.5) är fortfarande sann. För boostar (translation med konstant hastighet v) så blandas E och \mathbf{p} och därmed (2.4) och (2.5), men (2.3) är oförändrad som ekvation.

Nu om lösningar av de här kinematiska ekvationerna. Vi har tre 4-vektorer, varav bara två är oberoende enligt (2.3). Vi kan redan nu notera att det är ett ganska hårt krav, för t.ex. för rörelse i en dimension bestäms energin helt av beloppet på rörelsemängden (dvs. det finns inga vinklar), så i våra två oberoende 4-vektorer har vi bara 2 parametrar, och vi har rörelsemängdens bevarande, så specificerar vi initiala rörelsemängden p_1 är allt bestämt!

De här hårda kraven (samtidig energibevarande och rörelsemängdsbevarande) verkar på ytan vara mer rigid matematisk struktur än i newtonsk mekanik: i t.ex. newtonsk inelastisk stöt tillåter vi energiformer som är *utanför vår dynamiska beskrivning*, t.ex. värmeförlust. Vi brukar upprepa mant-rat att energi som helhet ändå är bevarad om man tar med värmeförlust, men den bevaringen är inte manifest, dvs. värmen står inte med någonstans i våra kinematiska ekvationer, vi stoppar in för hand att total energi är bevarad och räknar ifrån det ut eventuell värmeförlust. Man kan uttrycka det som att newtonsk mekanik inte har någon "helhetssyn" på energi. I relativitetsteori inför vi en sådan helhetssyn: vi är tvungna att uppfylla (2.4) eftersom den kan blandas med (2.5) under Lorentztransformationer. Det skulle skapa motsägelser att tillåta värmeenergi i (2.4) om den inte kan transformeras till (2.5).

Vi såg det redan i boll-exemplet, där vi var tvungna att baka in fjäderns potentiella energi i den totala energin hos systemet, annars kunde vi inte visa bevarande hos den relativistiska rörelsemängden. Det är uppenbarligen inte fallet i newtonsk mekanik. Man kan å andra sidan säga att om vi tvingar oss själva till att bokföra energi lika rigoröst i newtonsk mekanik som i Einsteins mekanik så har vi förstås även där fyra ekvationer att uppfylla. Einstein uppfann inte energins bevarande!

Det finns många olika sätt att manipulera de här ekvationerna för att lära sig olika saker. Det är oftast bäst att arbeta med "invarianter" så långt man kan, dvs. utan att välja koordinatsystem. Vi kan t.ex. ta rumtidskvadraten av (2.3), då får vi enligt $(p^\alpha)^2 = -m^2c^2$ att

$$(p_1^\alpha)^2 = (p_2^\alpha + p_3^\alpha)^2 = (p_2^\alpha)^2 + 2p_2^\alpha p_{3\alpha} + (p_3^\alpha)^2 \quad (2.6)$$

$$-m_1^2c^2 = -m_2^2c^2 + 2(-E_2E_3/c^2 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3) + m_3^2c^2. \quad (2.7)$$

Det här följer faktiskt från de två bevaringsekvationerna (2.4) och (2.5) (kvadrera och addera dem), så det ger ingen ny information utöver dem. Så är det alltid: fyrvektorspråket ger ingen ny naturlag. Men det språket är ändå ofta smidigare för att inse olika saker. Vi hade t.ex. kunnat inse (2.7) genom att kvadrera komponenterna direkt

$$(p_1^\alpha)^2 = (p_2^\alpha + p_3^\alpha)^2 \quad (2.8)$$

$$-E_1^2/c^2 + \mathbf{p}_1^2 = -(E_2 + E_3)^2/c^2 + (\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)^2 \quad (2.9)$$

$$-E_1^2/c^2 + \mathbf{p}_1^2 = -E_2^2/c^2 + \mathbf{p}_2^2 - 2E_2E_3/c^2 + 2\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 - E_3^2/c^2 + \mathbf{p}_3^2 \quad (2.10)$$

och använda energiekvationen (1.5) i (2.10) så får vi (2.7) igen. Det här är en användbar form av bevaringslag, eftersom massorna ofta är kända, så då relaterar det här tre okända storheter: E_2 , E_3 och $\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3$, som bestämmer vinkeln mellan partikel 2 och 3. Notera redan nu att för att prata om vinkel måste vi enligt vår trigonometri kunna prata om längder (kateter och hypotenusor), och längd beror på observatör, så vinkeln är liksom de separata energierna E_2 , E_3 inte invariant. Däremot går den att räkna ut för varje givet koordinatsystem.

Vi kan också flytta om bevaringslagen så den blir $p_3^\alpha = p_1^\alpha - p_2^\alpha$ och kvadrera den istället:

$$(p_3^\alpha)^2 = (p_1^\alpha - p_2^\alpha)^2 \quad (2.11)$$

$$-E_3^2/c^2 + \mathbf{p}_3^2 = -(E_1 - E_2)^2/c^2 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 \quad (2.12)$$

$$-E_3^2/c^2 + \mathbf{p}_3^2 = -E_1^2/c^2 + \mathbf{p}_1^2 + 2E_1E_2/c^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - E_2^2/c^2 + \mathbf{p}_2^2 \quad (2.13)$$

som återigen följer direkt från de två ekvationerna ovan, men återigen kan vi använda (1.5), nu i (2.13), för att lära oss något:

$$-m_3^2c^2 = -m_1^2c^2 - m_2^2c^2 + 2E_1E_2/c^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2. \quad (2.14)$$

och på samma sätt med $p_2^\alpha = p_1^\alpha - p_3^\alpha$, dvs. byter 2 och 3 i (2.14):

$$-m_2^2c^2 = -m_1^2c^2 - m_3^2c^2 + 2E_1E_3/c^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3. \quad (2.15)$$

Är de tre massorna kända har vi alltså 3 ekvationer som relaterar 6 storheter: energierna och skalärprodukterna av rörelsemängderna. Så vi kan gissa att vi har $6 - 3 = 3$ fria parametrar, en 3-vektor som vi t.ex. kan sätta till noll. Hittills har vi inte behövt säga alls vilket koordinatsystem vi arbetar i, vilket förstås är en fördel för då gäller ekvationerna i alla koordinatsystem. Nu specificerar vi.

2.1 Partikel 1:s vilosystem: MC-systemet

I partikel 1:s vilosystem (masscentrumssystemet) kan vi genast sätta $\mathbf{p}_1 = 0$. Det medför $E_1 = m_1c^2$, samt $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_3$, och därmed $\mathbf{p}_3^2 = \mathbf{p}_2^2$, låt oss kalla dem med ett gemensamt namn $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_3^2 = \mathbf{p}_2^2$ utan index. Med (2.14) och (2.15) får vi då

$$E_2 = \frac{(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2)c^2}{2m_1} \quad (2.16)$$

$$E_3 = \frac{(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2)c^2}{2m_1} \quad (2.17)$$

Givet massorna vet vi alltså nu alla tre totala energierna. Men då vet vi också rörelsemängderna enligt (1.5):

$$\mathbf{p}_i^2 = \frac{E_i^2}{c^2} - m_i^2 c^2. \quad (2.18)$$

för $i = 2, 3$. Nu vet vi alltså *alla* kinematiska storheter i partikel 1:s system om vi bara vet massorna, så vill vi designa ett experiment och uttrycka kinematiken i MC-systemet har vi till synes ingen frihet alls att specificera någonting! Det är ett exempel på den rigiditet man har i relativistisk mekanik som man vanligen inte väntar sig i newtonsk mekanik, men det betyder bara att vi är tvungna att baka in alla relevanta former av energi, t.ex. fjäderenergi, i viloenenergierna. (Notera att det inte betyder att man inte får skjuta in partikel 1 med vilken energi man vill, se motsvarande uträkning i laboratoriesystemet nedan.)

Det går som sagt att räkna ut rörelsemängderna \mathbf{p} utan vidare antaganden, men låt oss anta $m_2 = m_3 = m$ för enkelhets skull. Då blir

$$E_2 = E_3 = \frac{1}{2} m_1 c^2 \quad (2.19)$$

det vill säga partikel 2 och 3 delar lika på partikel 1:s energi, som verkar rimligt om partikel 2 och 3 har samma massa. Deras rörelsemängder är då motsatta i riktning men lika i belopp, och \mathbf{p}^2 blir:

$$\mathbf{p}^2 = \frac{(\frac{1}{2} m_1 c^2)^2}{c^2} - m^2 c^2 = \left(\frac{1}{4} m_1^2 - m^2 \right) c^2. \quad (2.20)$$

Eftersom $\mathbf{p}^2 \geq 0$ finns det bara en lösning för \mathbf{p} om

$$m_1 \geq 2m. \quad (2.21)$$

(Jämför återigen newtonsk mekanik – hade du väntat dig att man får villkor på massorna?). Det här kallas *tröskeln* för att processen skall ske. Har partikel 1 mindre viloenenergi än $2mc^2$ är processen omöjlig, dvs. partikel 1 sönderfaller inte, åtminstone inte till just de här partiklarna 2 och 3.

I gränsfallet $m_1 = 2m$, "på tröskeln", då skapas partikel 2 och 3 i vila från partikel 1 i vila, vilket verkar rimligt, det finns precis tillräckligt med energi för att producera dem och inget blir kvar till rörelse i partikel 1:s koordinatsystem. Gammalfaktorerna ges av

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \frac{E}{mc^2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 c^2}{mc^2} = \frac{m_1}{2m}, \quad (2.22)$$

som mycket riktigt är lika med 1, alltså noll hastighet, precis på tröskeln. Den kvarvarande ekvationen (2.7) ger vinkeln mellan rörelsemängderna via skalärprodukten,

$$\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 = \frac{(-m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)c^2 + 2(\frac{1}{2} m_1 c^2)^2/c^2}{2} = m^2 c^2 \quad (2.23)$$

som är ekvivalent med att säga att vi vet vinkeln mellan hastigheterna:

$$\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 = E_2 \frac{\mathbf{v}_2}{c^2} \cdot E_3 \frac{\mathbf{v}_3}{c^2} = \frac{1}{4} m_1^2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \quad (2.24)$$

Men för bara tre partiklar vet vi redan att $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_3$, alltså att vinkeln mellan \mathbf{p}_2 och \mathbf{p}_3 är 180 grader. (Kan du bekräfta det från ovanstående? Ledtråd: $\cos \theta = \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 / (p_2 p_3)$.) Varianter av de här två sista typerna av ekvationer är användbara om vi skulle ha haft fler partiklar, för att få ut vinklar mellan sönderfallsprodukter, eller i labsystemet, som nedan.

2.2 Partikel 2:s vilosystem

Partikel 2:s vilosystem (jfr. boll A:s vilosystem när vi pratade om fjädrarna och bollarna) definieras av att vi sätter $\mathbf{p}_2 = 0$. Det medför $E_2 = m_2 c^2$, samt $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3$, och därmed $\mathbf{p}_1^2 = \mathbf{p}_3^2$. Med (2.7) och (2.14) får vi då

$$E_1 = \frac{(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2)c^2}{2m_2} \quad (2.25)$$

$$E_3 = \frac{(m_1^2 - m_2^2 - m_3^2)c^2}{2m_2} \quad (2.26)$$

Givet massorna vet vi återigen alltså alla totala energierna, och då vet vi återigen också rörelsemängderna enligt (1.5):

$$\mathbf{p}_i^2 = \frac{E_i^2}{c^2} - m_i^2 c^2. \quad (2.27)$$

Låt oss återigen anta $m_2 = m_3 = m$ för enkelhets skull. Då blir

$$E_1 = \frac{m_1^2}{2m} c^2, \quad E_3 = \frac{(m_1^2 - 2m^2)c^2}{2m} \quad (2.28)$$

Notera att det är mer asymmetriskt än när vi använde partikel 1:s system, för att processen är $1 \rightarrow 2 + 3$, så genom att välja en av 2 eller 3 som vilosystemet bryter vi symmetrin mellan 2 och 3. Deras rörelsemängder är då motsatta i riktning men lika i belopp, som ges av:

$$\mathbf{p}_1^2 = \frac{(\frac{1}{2}m_1^2 c^2 / m)^2}{c^2} - m_1^2 c^2 = m_1^2 \left(\frac{m_1^2}{4m^2} - 1 \right) c^2. \quad (2.29)$$

och vi kan kontrollera att $\mathbf{p}_1^2 = \mathbf{p}_3^2$

$$\mathbf{p}_3^2 = \frac{(\frac{1}{2}(m_1^2 - 2m^2)c^2 / m)^2}{c^2} - m^2 c^2 = m_1^2 \left(\frac{m_1^2}{4m^2} - 1 \right) c^2. \quad (2.30)$$

Eftersom $\mathbf{p}_1^2 \geq 0$ är det här bara möjligt om

$$m_1 \geq 2m, \quad (2.31)$$

samma villkor som förut (vilken tur!). I gränsfallet $m_1 = 2m$ är alla partiklarna i vila. Gammafaktorerna ges av

$$\gamma_1 = \frac{E_1}{m_1 c^2} = \frac{\frac{1}{2}m_1^2 c^2 / m}{m_1 c^2} = \frac{m_1}{2m} \quad (2.32)$$

$$\gamma_3 = \frac{E_3}{m c^2} = \frac{\frac{1}{2}(m_1^2 - 2m^2)c^2 / m}{m c^2} = \frac{m_1^2 - 2m^2}{2m^2}, \quad (2.33)$$

Det här är som vi sett tidigare ett sätt att argumentera att en foton (partikel 1) inte kan bilda ett elektron-positron-par (partikel 2 och 3). När det gäller fotoner kan man inte som i förra exemplet ($\mathbf{p}_1 = 0$) gå till fotonens vilosystem för att bevisa det, för den har inget vilosystem, men i det här exemplet har vi gått till elektronens vilosystem ($\mathbf{p}_2 = 0$) och vi ser att tröskeln är densamma: en masslös partikel kan inte bilda två massiva. Det räcker inte att enbart pumpa in mer energi (öka frekvensen hos fotonen), för det är partikel 1:s *vilomassa* som förekommer i tröskelekvationen $m_1 \geq 2m$, och vilomassan hos en foton är orubbligt noll.

Däremot kan man skicka dit en till foton, så man har totalt fyra partiklar, det går bra att pumpa in energi i $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$ bara man har $2m_e c^2$ i total energi hos fotonerna.

2.3 I laboratoriesystemet

Laboratoriesystemet ("labsystemet"), ett system som står tryggt på marken under partiklarna, är ofta mest trassligt att räkna i, för ingen av rörelsemängderna är typiskt sett noll som i de två tidigare exemplen. Men det är ofta lättare att tolka rörelsemängderna i labsystemet, eftersom de är de vi verkligen ser i experiment (dvs. i laboratoriet).

Man skulle kunna införa ett koordinatsystem, t.ex. partikel 1 kommer in utefter x -axeln och partikel 2 och 3 flyger vidare med någon relativ vinkel (s.k. öppningsvinkel) gentemot x -axeln, så här: $\mathbf{p}_1 = (p_{1x}, 0, 0)$, $\mathbf{p}_2 = (p_{2x}, p_{2y}, 0)$, $\mathbf{p}_3 = (p_{3x}, p_{3y}, 0)$. Mer praktiskt är att prata om rörelsemängdernas belopp och vinklar, enligt strategierna från ovan.

Vi kan betrakta rörelsemängdens bevarande som att det bestämmer rörelsemängden för partikel 3, alltså $\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, så vi har två rörelsemängder kvar att arbeta med, \mathbf{p}_1 och \mathbf{p}_2 . För lika massor gäller av symmetriskäl $\mathbf{p}_2^2 = \mathbf{p}_3^2$. (Varning: det gäller däremot *inte* att de är motriktade $\mathbf{p}_2 \neq -\mathbf{p}_3$ som i MC-systemet, dvs. i labsystemet har rörelsemängderna samma belopp men olika vinklar.) Från $\mathbf{p}_3^2 = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 = \mathbf{p}_1^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_2^2$ ser vi då att $2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1^2$. Det betyder att vinkeln mellan \mathbf{p}_1 och \mathbf{p}_2 är, eftersom $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1 p_2 \cos \theta$:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{p_1 p_2} = \frac{p_1^2}{2p_1 p_2} = \frac{p_1}{2p_2} \quad (p_i = |\mathbf{p}_i|) \quad (2.34)$$

Vi kan notera ett potentiellt mysterium: $\cos \theta \leq 1$ alltid, men får inte högerledet vara större än 1? Vi får se. Nu använder vi energins bevarande:

$$E_1 = E_2 + E_3 = 2E_2. \quad (2.35)$$

Det som är lite trassligt med energier i relativitetsteori är att det är en kvadratrots i själva energin, därför skall man helst jobba med kvadrerade energier så långt det går: $E_1^2 = 4E_2^2$. Den ekvationen ser ut så här:

$$p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4 = 4(p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4) \quad (2.36)$$

som ger

$$4p_2^2 - p_1^2 = m_1^2 c^2 - 4m_2^2 c^2. \quad (2.37)$$

Vi har två ekvationer (2.34) och (2.37), för tre obekanta p_1 , p_2 , θ , så vi har $3 - 2 = 1$ fri parameter, som vi fysikaliskt gärna väljer som p_1 , rörelsemängden hos den inskickade partikeln i labsystemet (den som kommer på elräkningen). Så vi löser ut $p_2 = p_1 / (2 \cos \theta)$ från (2.34), och ekvation (2.37) blir

$$4 \cdot \frac{p_1^2}{4 \cos^2 \theta} - p_1^2 = (m_1^2 - 4m_2^2) c^2 \quad (2.38)$$

$$\left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right) p_1^2 = (m_1^2 - 4m_2^2) c^2. \quad (2.39)$$

I linje med frågan om $\cos \theta$ ovan noterar vi nu att $\cos^2 \theta \leq 1$, så parenteserna i vänsterledet är alltid positiv eller noll. Därför har ekvationen bara lösning om $m_1^2 \geq 4m_2^2$, dvs. vårt bekanta tröskelvillkor $m_1 \geq 2m_2$ för att sönderfallet skall kunna inträffa.

Notera att det inte hjälper att pumpa in mer energi (öka p_1): det kommer aldrig att komma någon lösning till (2.39) om inte tröskelvillkoret är uppfyllt, precis som vi också noterade i förra sektionen då vi arbetade i partikel 2:s vilosystem. Det är för att en ja/nej-fråga som "sker sönderfallet överhuvudtaget?" inte kan bero på vilken observatör som ställer den (jfr. stången och ladan). Så vi kan alltid gå till masscentrumsystemet för att besvara frågan, och där är partikel 1 i vila, så bara dess viloen energi kan spela roll för den frågan.

Som avslutning kan vi roa oss med att lösa ut cosinus av vinkeln explicit från (2.39):

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(m_1^2 - 4m_2^2)c^2}{p_1^2}}} \quad (2.40)$$

Vi ser att för stor inkommande rörelsemängd blir högerledet nära 1, då blir öppningsvinkeln nära noll grader ($\cos 0 = 1$), dvs. restprodukterna flyger iväg väldigt nära strålriktningen. Så faktumet att man alltid kan gå till masscentrumssystemet för att förstå tröskelvillkoret betyder inte att våra räkningar i labsystemet är ointressanta: räkningarna i masscentrumssystemet kan inte säga något om öppningsvinkeln θ , eftersom det inte finns någon ursprunglig strålriktning hos partikel 1 att jämföra med i masscentrumssystemet: motsvarande vinkel är alltid 180 grader där, partikel 2 och 3 flyger alltid ut i motsatt riktning ("rygg mot rygg") i masscentrumssystemet.

På partikelfysikspråk kallas riktningen nära strålriktningen "very forward", och man karakteriserar det med stor rapiditet (Schutz "velocity parameter") istället för liten vinkel, som ger bättre upplösning eftersom rapiditeten är logaritmisk i vinkeln¹. Om detektorn är konstruerad som en stor cylinder ("tunna") och restprodukterna (partikel 2 och 3) flyger väldigt nära strålriktningen så skapar det problem: de två strålrören är 6 cm i diameter vardera, och kommer restprodukterna inte ut ordentligt i höjded eller sidled så kommer man att missa dem. Så i vissa detektorer som den mindre detektorn LHCb specialiserar man sig på stor rapiditet, och sätter detektorelement så långt som 20 m i strålriktningens förlängning och så nära strålen som 7 mm, i motsats till 5 cm i de två stora detektorerna ATLAS och CMS.

2.4 Sönderfall och inre struktur

Vi hade en bra diskussion om det här 2016 när vakna studenter påpekade att om vi drar analogin med fjädersystemet till sin spets, så borde partiklarna i princip kunna komma ut med olika vinklar relativt strålriktningen även om massorna är samma, vilket jag verkar ha uteslutit i ovanstående uträkning, där bara öppningsvinkeln dyker upp. Tanken var som följer: fjädern skjuter iväg partiklarna med någon kraft, men fjädern måste ursprungligen inte vara orienterad vinkelrätt mot rörelseriktningen (fast den var det i exemplet i kompendiet). Så om man skjuter in en "sned" fjäder med bollar skulle bollarna skjutas iväg med olika hastigheter relativt strålriktningen, även om massorna är samma.

I fysik pratar man om *symmetri*: om partiklarna har samma massa, och partikeln innan sönderfallet inte har någon inre struktur som vi tar med i beräkningen, då måste ekvationerna visa att det ovanstående inte kan hända, eftersom ingen riktning upp eller ned är speciell och inget kan skilja partiklarna från varandra. Det finns mycket riktigt bara en vinkel θ i ovanstående. Men det finns sönderfall i partikelfysik då partiklar har inre riktning: t.ex. en atomkärna som består av två kärnpartiklar har i princip en riktning innan sönderfallet. En elementarpartikel kan också ha en riktning i mer abstrakt mening: spinn, som i Stern-Gerlach-experimentet. Spinnet bestämmer en riktning, och partiklar med spinn har differentiella tvärsnitt som beror annorlunda på vinklarna än för partiklar utan spinn. Det är t.ex. så man testat experimentellt att Higgs-partikeln har spinn 0 och inte spinn 2.

I praktiken kan det vara svårt att kontrollera riktningen hos t.ex. en inskickad atomkärna, så att strålen i praktiken är en slumpmässig blandning av riktningar. För sådant är det bra med elektroner, som är lättare att kontrollera än atomkärnor, och lättare att kontrollera än protoner också för den delen. Med en *polariserad* stråle av elektroner, dvs. "känd riktning" av spinn hos de inkommande partiklarna relativt rörelseriktningen (s.k. *helicitet*), kan man göra mycket mer precisa experiment än slumpmässigt blandade partiklar, och det är delvis därför som nästa generation av kolliderare föreslås vara leptonkolliderare istället för hadronkolliderare som nuvarande LHC på CERN. (Det är inte en ny idé: LEP-kollideraren på CERN var föregångare till LHC med mycket lägre energi.)

Som avslutning på diskussionen om inre struktur hos elementarpartiklar: det är en del av hypoteserna i teorier bortom Standardmodellen, t.ex. strängteori, att förklara spinn via någon slags inre struktur: en sträng som oscillerar på ett visst sätt är spinn 0, ett annat sätt är spinn 1, osv. Men det finns i dagsläget inget experimentellt fog för att spinn skulle komma från någon slags inre struktur hos elementarpartiklarna: de är såvitt vi vet matematiska punkter utan utsträckning, utan någon fjäder inuti, och spinn är en experimentellt fastlagd kvantfysisk egenskap utan egen tolkning.

¹Tänk så här: hastigheten är "tanh" av rapiditeten, och "tanh" är en kombination av exponentialfunktioner. Inversen av tanh borde därför vara någon kombination av logaritmer. I partikelfysik används i praktiken en variant av rapiditet som kallas "pseudorapiditet".

3 Mer om kvantfält: vågfysik och kvantfysik ger antimateria

För att förstå lite om kvantfält måste man först förstå vad ett klassiskt fält är. De klassiska fält du är lite bekant med är elektromagnetiska fältet och gravitationsfältet. Tyvärr är de två fälten lite komplicerade, som har att göra med att kraftbärarna har spinn (den kvantfysiska egenskap som du lärt dig att elektronen har): fotonen har spinn 1 och gravitonen har spinn 2. Det enklaste fältet är ur den synpunkten Higgsfältet, som är spinnlöst (spinn 0, eller *skalärfält*), men det är du nog inte så bekant med i detalj än. Det finns som tur är många icke-elementära fält som är skalärfält, t.ex. anger man helt vanlig temperatur som en funktion av läge och tid så får man temperaturfältet $T(x, t)$. Mer relevant för det vi pratar om här är vågfysik, t.ex. vågor på en sträng, då pratar man om en förskjutning $D(x, t)$ från jämviktsläget, som en funktion av rum och tid. Betraktar vi $D(x, t_0)$ vid fix tid t_0 får vi en ögonblicksgraf av strängen, betraktar vi $D(x_0, t)$ vid fixt läge x_0 får vi en historiegraf. I allmänhet kan vi kalla $D(x, t)$ ett *klassiskt skalärfält*, en skalär (dvs. inte vektor-) funktion av rum och tid, som också Higgsfältet är. Man brukar använda grekiska "fi", $\phi(x, t)$ för att beteckna ett skalärfält i allmänhet, vare sig det är temperatur, vattenvågor, eller Higgsfältet. (Se Strasslers blogg för snygga animeringar av olika fält.)

Om partiklarna som fältet skall beskriva (när det sedan blir ett kvantfält) skall vara masslösa² skall $\phi(x, t)$ vara en lösning av *vågekvationen*,

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x, t) = 0 \quad (3.1)$$

en partiell differentialekvation, som du kanske har nosat på på flervariabelanalysen. När man pratar om fält, och särskilt med 3 rumsdimensioner och inte bara ett futtigt x som här, brukar man kalla det här (masslösa) Klein-Gordon-ekvationen.³ De flesta studenter på den här nivån greppar inte riktigt vågekvationen, men vi skall jobba med det i detalj på Matematisk fysik II. Hursomhelst, två möjliga typer av vågor är som du vet sinus- eller cosinus-vågor, och argumentet (fasen) skrivs $kx - \omega t$. De är alltså lösningar till vågekvationen. Man kan nu använda Eulers formel

$$\cos(kx - \omega t) = \frac{1}{2} \left(e^{i(kx - \omega t)} + e^{-i(kx - \omega t)} \right), \quad (3.2)$$

eller en liknande formel för sinus. Det betyder att istället för sinus och cosinus kan vi jobba med två andra möjliga lösningar som kan verka lite mindre bekanta men som är enklare matematiskt: de komplexa funktionerna $e^{i(kx - \omega t)}$ och $e^{-i(kx - \omega t)}$. Vi noterar redan nu att man kan få dem från varandra genom att byta $(x, t) \rightarrow (-x, -t)$, dvs. med en spegling och att låta tiden gå baklänges, rent matematiskt.

I kvantfysik, t.ex. för väteatomen, pratar man om diskreta (stegvisa) energitillstånd. Man brukar lite abstrakt använda rakt streck och hakparentes för att beteckna ett kvanttillstånd, dvs. istället för "tillstånd 1", "tillstånd 2" osv skriver man:

$$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots \quad (3.3)$$

(för mer om detta, se min text Gymnasiefysik för Fysik 3!). Man brukar "koppla ihop" tillstånden med s.k. *steg-operatorer*, en som stegar ned som heter a , och en som stegar upp som heter a^\dagger (utläses "a-dagger", *dagger* betyder "dolk", men tänk att det ser ut som ett plus):

$$|0\rangle \begin{array}{c} \xrightarrow{a^\dagger} \\ \xleftarrow{a} \end{array} |1\rangle \begin{array}{c} \xrightarrow{a^\dagger} \\ \xleftarrow{a} \end{array} |2\rangle \begin{array}{c} \xrightarrow{a^\dagger} \\ \xleftarrow{a} \end{array} |3\rangle \begin{array}{c} \xrightarrow{a^\dagger} \\ \xleftarrow{a} \end{array} \dots \quad (3.4)$$

Man kan alltså skriva att $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$, osv. medan $a|1\rangle = |0\rangle$. Vi kan tänka oss a^\dagger som att man lägger till fler partiklar i ett tillstånd, och a som att den tar bort partiklar, vilket åtminstone från bevaringslagarna (t.ex. för kvarktal N_q) är lite som att lägga till antipartiklar. Ett kvantfält betecknas $\hat{\phi}(x, t)$

²För partiklar med massa måste man använda en generalisering av vågekvationen som Matt Strassler kallar vågekvation av "klass 1" i motsats till "klass 0" som är den vanliga vågekvationen.

³Den svenske fysikern Oskar Klein var med och kom på många saker. Slå gärna också upp Kaluza-Klein-teori.

och är en kombination av de här stegoperatorerna och det klassiska fältet $\phi(x, t)$. Man brukar säga att ett kvantfält är som att man har stegoperatorer i varje punkt i rumtiden, dvs. det finns chans att skapa en partikel i varje liten punkt i rumtiden. Det finns matematiska krav på teorin som leder till att i lösningen till vågekvationen som ser ut som $e^{-i(\dots)}$ har a och a^\dagger ombytt plats jämfört med $e^{+i(\dots)}$. Men eftersom vi också kan byta mellan de två lösningarna till vågekvationen genom att spegla rumtiden $(x, t) \rightarrow (-x, -t)$, så är kvantfältteori *invariant* om man speglar rumtiden *och* byter partiklar och antipartiklar.⁴ Man kan därför betrakta antipartiklarna rent matematiskt som partiklar som går baklänges i tiden, och det är därför vi byter från partikel till antipartikel när vi "korsar" en Feynman-diagramlinje från inpartikel till utpartikel. Mer fysikaliskt betyder det att vi har "uppgraderat" de två oberoende lösningarna av vågekvationen till kvantfält, och deras stegoperatorer måste vara motsatta, så vi tolkar den ena som en partikel och den andra som en antipartikel. Bägge rör sig fysikaliskt sett *framåt* i tiden.

Det är bara om man inte är så bekant med antipartiklar som man lockas till att prata om partiklar som fysikaliskt skulle gå bakåt i tiden. I själva verket är antipartiklar en naturlig del av det vi idag kallar ett kvantfält, så till den grad att man sällan tänker på antipartiklarna som "andra partiklar" längre, utan olika manifestationer av ett och samma kvantfält. Reglerna vi använde för att korsa över en partikel till en antipartikel i t.ex. betasönderfall står på fast matematisk grund.

4 Lorentztransformationerna, matriser och grupper

Vi vet redan hur matrisen Λ för Lorentztransformationer ser ut, antingen med hastighet v eller (lite snyggare) med rapiditet φ . Men hur hade vi kunna härleda det mer systematiskt? Om man skriver en fyrvektor x^α som x (dvs. indexet är underförstått) och jobbar med 4×4 -matriser Λ , så kan vi skriva Lorentztransformationerna som att x transformeras till Λx för någon matris Λ . Intervallet i kvadrat (vi skriver x istället för Δx) skrivs då som $x^2 = x^T \eta x$ där η är metriken, den matris med element $\eta_{\alpha\beta}$ som vi redan pratat om, och T står för transponat, alltså att byta spalter och rader i en matris, $(M^i_j)^T = M^j_i$. För att x^2 skall vara invariant så kräver vi

$$(\Lambda x)^T \eta (\Lambda x) = x^T \eta x \quad (4.1)$$

vilket enligt $(\Lambda x)^T = x^T \Lambda^T$ tvingar Λ att uppfylla

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (4.2)$$

Matriser Λ som uppfyller det här är Lorentztransformationerna. Det är symmetriska matriser så ekvationen ger 10 villkor på 16 matriselement, och vi får $16 - 10 = 6$ oberoende lösningar, som är de tre rotationerna och de tre boostarna man kan göra i tre dimensioner. De sex matriserna Λ kan man multiplicera ihop och det ger olika kombinationer av rotationer och boostar (även i olika riktningar). Alla multiplikationer ger en ny Lorentzmatris, så de bildar i matematisk mening en *grupp* (som per definition skall ha en väldefinierad multiplikation som inte tar en utanför den klass av objekt man studerar). Gruppen av 4×4 -matriser Λ som uppfyller (4.2) kallas Lorentzgruppen eller $O(1, 3)$, där 1 står för tid och 3 står för rum, och O står för "ortogonal".

Den allmänna teorin för symmetrier som rotationer och Lorentz-symmetrier är [Lie-algebra](#). Här kan man inte motstå att rekommendera Jürgens första bok [2]. Jag rekommenderar också kursen i differentialgeometri av Conlon [3]. När jag jobbade i Kanada ht 2017 gav jag intresserade matematikdoktorander följande uppgift:

Betrakta Lorentzgruppen $O(3,1)$, Conlons exempel 3.4.19, eller snarare specialfallet $O(1,1) \subset O(3,1)$: hitta en 2×2 -matris som lämnar kvadratiska formen $x^2 - t^2$ invariant och beror på en parameter φ som kallas "pseudo-vinkeln", i analogi till den vanliga rotationsvinkeln i en rotationsmatris i $O(2)$. Relatera din $O(1,1)$ -matris till Lorentz-transformationerna av rum och tid. Visa att komposition $\varphi_1 + \varphi_2$ av två $O(1,1)$ -pseudorotationer leder till kompositionsregeln $v_1 + v_2 / (1 + v_1 v_2)$ för hastigheten $v = \tanh \varphi$ och att den här

⁴Den här invariansen kallas "CPT-symmetri", slå gärna upp det. Jag har förstås bara skissat det väldigt grovt, men det finns ett matematiskt bevis att kvantfältteorier har CPT-symmetri, t.ex. av Lüders och Pauli.

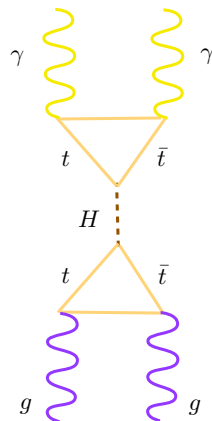
kompositionen betyder att ingen observatör kan nå ljusets hastighet som är $v = 1$ i de här enheterna, om de inte redan rör sig med $v = 1$ (dvs. observatören är en foton, gluon, eller möjligtvis graviton). Ledning: se Schutz uppgift 1.19, som jag löser [en video](#). Se även en [annan video](#) om hur man upprepar transformationen N gånger och tar gränsen N stort.

Notera att formuleringen är baklänges som vi har formulerat det: börja med rapiditet (pseudovinkel) φ , skriv om formuleringen till hastighet v ! För en matematiker är formeln $v_1 + v_2 / (1 + v_1 v_2)$ ett onaturligt sätt att representera komposition. Det är onekligen smidigare med rapiditet (pseudovinkel) $\varphi_1 + \varphi_2$, men för en fysiker är hastighet mer elementärt.

I speciell relativitetsteori kan man definiera partiklar som olika representationer av Lorentzgruppen.⁵ I allmän relativitetsteori, där man tillåter gravitationsfält, vet ingen någon riktigt bra definition av partiklar, och olika observatörer har olika åsikt om hur många partiklar en viss rumtidsregion innehåller. (Det här kan man redan skönja i speciell relativitetsteori om man tänker efter riktigt noggrant: slå upp *Unruh-effekten*.)

5 Loopdiagram: Higgspartikeln

Jag har nämnt att virtuella partiklar både skapas och förintas utan att man ser dem. Det finns inget som säger att det inte kan hända upprepade gånger. För varje par av Feynmanregler man stoppar in måste man "betala" en kopplingskonstant α , så det blir mindre och mindre sannolikt ju fler virtuella partiklar man vill ha, men ibland finns det inget annat sätt att göra ett visst typ av diagram än att ha flera virtuella partiklar. Bildar de en sluten kurva i diagrammet kallas det ett "loopdiagram". Ett viktigt exempel är produktion av Higgspartikeln från gluoner (som det står i min presentations-PDF från Föreläsning 3 består protonen till största delen av gluoner och mindre av kvarkar vid de höga energierna i moderna partikelacceleratorer): $g + g \rightarrow H$. Higgspartikeln kopplar till alla massiva partiklar så den har stort sönderfallstvärnsnitt, och sönderfaller alltså väldigt fort efter den har skapats, t.ex. till två fotoner: $H \rightarrow \gamma + \gamma$, som var huvudupptäcktskanalen (den och en annan) när CERN ofentliggjorde upptäckten i juli 2012. Men varken fotonen eller gluonen har massa, så Higgspartikeln kopplar inte direkt till dem! Kopplingen kan däremot ske genom att utbyta en virtuell kvark och samtidigt skapa ett kvark-antikvarkpar som förintas och bildar en Higgspartikel, i ett s.k. 2-loopsdiagram:



"Loopar" syftar alltså på de två triangelformade delarna av diagrammet. Toppkvarken t är tyngst så den har störst koppling till Higgsfältet, därför har jag skrivit ut den och inte andra kvarkar. Det är en intressant historia hur folk räknade ut teoretiska förutsägelser för tvärsnitt från det här loopdiagrammet (och andra liknande diagram) med enormt mycket arbete, på 1980-talet. Idag kan man i princip räkna ut diagrammet på en kurs i kvantfältteori på masternivå — fast det skulle räknas som en svår uppgift på den nivån. En mer rimlig början är följande diagram för skalärfält ϕ (spinn 0):

⁵Om man skall vara noggrann är spinn-1/2-partiklar som elektroner inte någon representation av Lorentzgruppen själv, utan av en grupp som "täcker" Lorentzgruppen, den kallas "spinn-gruppen" $Spin(1, 3)$. För varje element (matris) i Lorentzgruppen finns det två matriser i spinngruppen.

$$= \int \frac{d^D \ell}{(2\pi)^D} \frac{1}{\ell^2 (\ell + k_1)^2 (\ell - k_4)^2 \ell_{34}^2}$$

som jag räknar ut i en [video](#) till kursen Matematisk fysik II, och i mer detalj i mina ["Introductory notes"](#) till kvantfältteori på master-nivå. Linjerna i diagrammet representerar *Greens-funktioner* $G(x_1, x_2)$ som ger sannolikhetsamplituden att partikeln går från punkt x_1 till punkt x_2 . Man hittar G som lösning till Klein-Gordon-ekvationen, som är samma som vågekvationen (3.1) ovan fast med en extra term $m^2\phi(x, t)$ för massa m . Lösningen av den differentialekvationen är:

$$G(x_1, x_2) = - \int d^4 p \frac{e^{ip_\alpha(x_1^\alpha - x_2^\alpha)/\hbar}}{p_\alpha p^\alpha + m^2 c^2} \quad (5.1)$$

och knutpunkterna representerar kopplingskonstanten (se kompendium del 1). Jag har kallat 4-rörelsemängden i loopen längst till höger ℓ^α (ℓ för "loop", inget att göra med medelfriväg), de yttre k_1 till k_4 betraktar vi som givna, och flödet av 4-rörelsemängd använder sig av bevaring i varje knutpunkt, som i Kirchhoffs lagar i ellära. (Utifrån det: vad står k_{34} för?)

Att ha rimligt pålitliga teoretiska förutsägelser om vad som bör kunna detekteras är absolut nödvändigt för att kunna planera ett miljard-euro-projekt. Detektorerna vid LHC har optimerats bland annat för att kunna detektera just två fotoner med hög energi, $H \rightarrow \gamma + \gamma$. I kompendiet finns en bild på data från ett sådant sonderfall.

Liknande diagram som det för skalärfältet ϕ ovan används för att räkna ut första kvantkorrektio- nen till elektrodynamik, som först [gjordes 1936](#) av Heisenberg och hans doktorand Hans Euler (!) [4]. För gluoner är sådana processer viktiga, men för elektroner och fotoner har det aldrig testats direkt eftersom den är proportionell mot $\alpha_{\text{em}}^2 = (1/137)^2$ som är ganska litet så intensiteten hos partikel- strålarna måste vara ofantligt hög, men t.ex. [folk på Chalmers](#) har stora projekt där de försöker med högintensiva lasrar.

Referenser

- [1] D. Tong, Lectures on Dynamics and Relativity, damtp.cam.ac.uk/user/tong/relativity.html
- [2] J. Fuchs, C. Schweigert, "Symmetries, Lie Algebras and Representations: A Graduate Course for Physicists" (2003), Cambridge University Press, [länk Amazon](#).
- [3] L. Conlon, "Differentiable Manifolds" [länk Amazon](#). Min [läsguide till Conlon](#) ligger som "specialämne" under Matematisk fysik.
- [4] W. Heisenberg, H. Euler, "Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons" (1936) Z. Phys. 98, 714.