

## Grundläggande optik för solpaneler, v0.8 eller: varför himlen är blå

### 1 Referenser

Introduktionsböcker i optik: Jönsson [1]. Pedrotti [2]. Grunder i elektromagnetism: Cheng [3], Jackson [4], och Ingemars kommentarer om Jackson [7]. Sajt: [PV education](#). Även [Feynman Lectures, del I](#).

### 2 Grundkunskaper

Maxwells ekvationer (1882) för elektriskt fält  $\mathbf{E}$  och magnetiskt fält  $\mathbf{B}$  är, i SI-enheter:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (2)$$

Du som har läst analytisk mekanik kan härleda Maxwells ekvationer i sin tur som Euler-Lagrange-ekvationerna från Lagrange-funktionen  $\mathcal{L} = \frac{1}{4\mu_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}$ . Här tar vi Maxwells ekvationer som givna, men det är värt att notera följande logiska slutna cirkel: det är via Fermats och Huygens principer som man härleder brytning i grundläggande optik (t.ex. Snells lag nedan):

- Fermats princip (1662): stråle av ljus tar snabbaste (inte kortaste) vägen
- Huygens princip (1678): varje punkt på en vågfront är själv en vågkälla.

Fermats princip inspirerade Lagranges mekanik 1788, före Maxwells ekvationer 1862. Pedrotti nämner den här viktiga kopplingen i en fotnot i kap.2.

### 3 Ljus från ett medium till ett annat: Fresnels ekvationer

Snells lag kan du redan från gymnasiet:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (3)$$

Man ser också  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ , men för ett gränsskikt pratar vi om *två* medier 1 och 2 men *tre* vinklar: infallande, reflekterad och brytningsvinkel. I en första förklaringen härleddes Snells lag från Fermats princip, men nu skall vi härleda från Maxwells ekvationer, som leder till en viktig generalisering.

#### 3.1 Basvågor

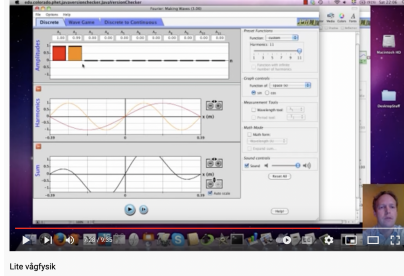
Det första steget är Fourier-analys: att dela upp en riktig våg i basvågor, där varje basvåg har en specifik vågvektor  $\mathbf{k}$  och en specifik vinkelfrekvens  $\omega$ :<sup>1</sup>

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (4)$$

<sup>1</sup>Pedrotti har både fetstil och vektorpil, alltså tårta på tårta. Notera också att det fysikaliska fältet kan definieras som t.ex. realdelen av det komplexifierade fältet, som Pedrotti går i genom i kap.4 och 5. Jag skriver "t.ex." för om det är sinus eller cosinus är bara en fråga om initial fas, alltså när vi startar klockan, eftersom  $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ .

(Tänk gärna specifik *färg*, eftersom synligt ljus är en del av det vi diskuterar här, fast inte det enda. Färg är också roten i ordet *monokromatiskt*, specifik färg eller frekvens, från grekiska *kroma*, färg.)

Att fokusera på en specifik frekvens som i ekv. (4) förklarar den matematiska analysen enormt. Men samtidigt är det konceptuellt icke-trivialt. Våra basvågor är nu sinusar och cosinusar. Det kan kännas tryggt, men en sinusvåg är oändligt lång! Bara när vi sedan adderar ihop många basvågor med specifika Fourier-koefficienter (som i min [YouTube-video](#) till höger) får den totala vågen ändlig utsträckning, som alla riktiga vågor har.



Det till synes enkla steget att jobba med monokromatiska basvågor påverkar hur böcker om solcells-fysik presenteras, som vi kommer att se senare.

### 3.2 Elektromagnetiska vågor är transversa

Vågens riktning ges av vågvektorn  $\mathbf{k}$ , som enligt t.ex. Chengs bok pekar i samma riktning som den s.k. Poynting-vektorn:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} . \quad (5)$$

Det är en liten övning i högerhandsregeln att kolla i figurerna nedan att  $\mathbf{k}$  pekar utefter  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ .

En elektromagnetisk våg är alltid transvers:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6)$$

alltså de elektromagnetiska fälten svänger vinkelrätt mot rörelseriktningen  $\mathbf{k}$ . (Jämför ljudvåg, som är longitudinell.) Att vågen är transvers följer från Maxwells ekvationer i vakuum ( $\rho = 0$ ), för

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = i \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = i \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \quad (7)$$

och samma för  $\mathbf{B}$ . På elementarpartikelnivå följer det i sin tur från att fotonen är masslös<sup>2</sup>, men här tänker vi alltså för tillfället helt makroskopiskt.

### 3.3 Polariseringsriktningen kan ändras i tiden

Riktigt ljus kan vara opolariserat, eller polariserat på olika sätt.

- *Linjärpolariserat* betyder att svängningsriktningen är konstant i tiden. Då kan vi välja vektorn  $\mathbf{E}_0$  utefter en fix koordinataxel, t.ex.  $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{x}}$ .
- *Cirkulärpolariserat* betyder att svängningsriktningen roterar kring vågens färdriktning, så att  $\mathbf{E}(t)$  beskriver en spiral.

Notera att om den här elektromagnetiska vågen fortplantar sig i rummet utan att träffa på något som har någon speciell riktning så är  $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{x}}$  bara ett val, inget mer. Vi hade lika väl kunnat skriva  $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{y}}$  eller  $\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$ , eller vilken annan linjärkombination som helst.

Med vår notation kan vi t.o.m. välja basvektorn komplex: med  $\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 (\hat{\mathbf{x}} + i \hat{\mathbf{y}})$  får vi

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 (\hat{\mathbf{x}} + i \hat{\mathbf{y}}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) + \pi/2} \quad (8)$$

där jag plockade in  $i = e^{i\pi/2}$  i exponenten. Vi ser att cirkulärpolariserat ljus har fasförskjutning  $\pi/2$  mellan linjärpolarisering i  $x$ -led och linjärpolarisering i  $y$ -led. Det betyder att när det har gått en tid

<sup>2</sup>Eftersom masslösa partiklar inte är meningsfulla i newtonsk mekanik behövs relativitetsteori för att förklara kopplingen. Motexempel: den svaga kärnkraften bärs inte av en transvers våg, för att kraftbärarna,  $W/Z$ -partiklarna, har massa. Jag tänker inte breda ut mig om det här, men se gärna mina anteckningar "Vad är kvantfältteori?" om du är intresserad. (Det elektromagnetiska fältet är det ursprungliga fältet i kvantfältteori.)

$t = \pi/(2\omega)$  så är komponenten i  $y$ -led i samma konfiguration  $\frac{1}{\sqrt{2}}E_0 e^{ik \cdot x}$  som komponenten i  $x$ -led var vid  $t = 0$ . Pedrotti skriver det här i Tabell 1 i kap.22 i min upplaga, med konventionen att det här kallas cirkulärpolarisering åt *vänster*. Med relativt minustecken  $\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}E_0(\hat{x} - i\hat{y})$  kallas det *höger*.

**Övning 0:** Skissa  $\mathbf{E}(t)$  vid olika tidpunkter. Är vänster/höger sett bakifrån eller framifrån?

Med komplex  $\mathbf{E}_0$  kunde vi bygga upp en cirkulärpolariserad våg från två linjärpolariserade med fasförskjutning. Det går också att göra baklänges: vi kan bygga upp en linjärpolariserad våg från två cirkulärpolariserade (prova!). Det vi inte kan göra är att bygga upp en given linjärpolariserad våg från *en* cirkulärpolariserad våg. Så det har ändå fysikalisk innebörd att vara polariserad cirkulärt eller linjärt. Vi kommer att prata mer om linjärt än cirkulärt.

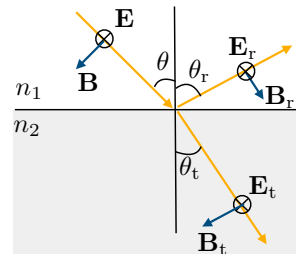
En liten kommentar igen om det mikroskopiska: för fotoner är det konceptuellt lite trevligare att prata om vänster-/höger-polarisering relativt färdriktningen än om linjärpolarisering utefter någon viss axel. Det senare känns som att man introducerar axlar som inte har något med fotonen i sig att göra. Man säger att fotonen har *helicitet* höger eller vänster, från *helix*, spiral.<sup>3</sup> I partikelfysik har beräkningsmetoder som tar hänsyn till elementarpartiklarnas helicitet lett till stora framsteg sista tio åren.

### 3.4 Uppdelning E/M vid gränsskiktet

Transversa elektriska och magnetiska moder (mod = sätt<sup>4</sup> att svänga på) bör du ha hört om i vågledare (eng. *waveguide*) se Cheng [3] eller Jackson [4]. Situationen vi är intresserade av här är "tvärtom": inte en våg *utefter* ett gränsskikt, utan *igenom* gränsskiktet.

Betrakta en våg som åker in mot gränsskiktet med en viss vinkel, alltså vågvektorn  $\mathbf{k}$  pekar in mot gränsskiktet snett med den vinkeln. I allmänhet svänger då  $\mathbf{E}$  och  $\mathbf{B}$  i någon vinkel mot gränsskiktet. Men vi kan enligt superpositionsprincip för linjära vågor (kap.5 i Pedrotti) komponentuppdelade hur vi vill.

Vi börjar med att studera komponenten som är *transvers elektrisk* (TE), då elektriska fältet  $\mathbf{E}$  svänger utefter gränsskiktet, dvs. vi betraktar ljus som är linjärpolariserat i gränsskiktets plan. Det magnetiska fältet  $\mathbf{B}$ , som är vinkelrätt mot det elektriska, svänger då *inte* utefter gränsskiktet, utan har någon infallande vinkel  $\theta$  mot det. Med andra ord, koordinatvalet är så att vinkeln  $\theta$  in mot gränsskiktet, och vinklar  $\theta_r$  och  $\theta_t$  för reflekterat och transmitterat (överfört) ljus alla tre syftar på magnetiska fältvektorn  $\mathbf{B}$ , medan  $\mathbf{E}$  i alla tre fall är "pil ut" i figuren.



Motsatsen till TE-moden i figuren är TM-mod, då det är magnetiska fältet  $\mathbf{B}$  som svänger utefter gränsskiktet, istället för elektriska fältet  $\mathbf{E}$ . TM-moden är *inte* linjärpolariserad utefter gränsskiktet, för linjärpolariserings-riktningen är definierad som elektriska fältets riktning.<sup>5</sup>

TE-mod kallas ibland "P" för parallell ( $\mathbf{E}$  utmed gränsskiktet), då kallas TM-mod "S", från tyska *senkrecht* (vinkelrät). Jag tycker nog TE och TM är tydligare vad som är vad än P och S.

### 3.5 Vad säger Maxwell?

Först lite terminologi: när vi löser differentialekvationer som Maxwells ekvationer behöver vi sätta randvillkor (*boundary conditions*). I enkla fall, som vågor på en gitarrsträng, är "randen" verkligen där intervallet av intresse tar slut, där strängen sitter fast, utanför det finns "ingenting". Här har vi

<sup>3</sup>På svenska skulle man kunna säga att fotonen har *spiralitet*. Men det gör man inte.

<sup>4</sup>Av latin *modus*, sätt. Enligt SAOB användes "mod" förr ibland för "sätt" mer allmänt på svenska. Det har konkurrerats bort av betydelsen "mod" som i "modig" (SAOB substantiv 1, från fornsvenska) men förekommer t.ex. i ordet *mode* för kläder.

<sup>5</sup>Pedrotti har det som definition, men i MR-kamera-fysik är polarisering definierat som *magnetiska* fältets riktning. Vi håller oss till optik-ord här, men jag tycker det visar på ett instruktivt sätt att det inte alltid räcker att säga "det står ju så i boken".

ett gränsskikt (*interface*) mellan två områden. Konceptuellt är gräns inte riktigt samma sak som rand, där något tar slut.

Men betrakta det från perspektivet av fältet i ena mediet: där mediet tar slut är det en rand, med ett randvillkor på fältet i det området. Gör sedan motsvarande analys i andra mediet. Vi kan då betrakta vårt "gränsvillkor" som ett konsistensvillkor, att två "randvillkor" skall stämma överens. Ett bättre ord vore kanske "matchningsvillkor": vi klistrar ihop områdena.

Föregående stycke är tänkt att hjälpa att undvika missförståndet att "matchningsvillkoret" är något som enbart säger något lokalt om gränsskiktet. I själva verket menas att lösningen till våra differentialekvationer *överallt i hela det ena mediet* (t.o.m. oändligt långt bort, när vi jobbar med ofysikaliska sinus- och cosinus-basvägor!) beror på vad vi sätter för randvillkor. Så det är inte något som bara har lokal betydelse.

Matchningsvillkoret är att komponenter som är parallella med gränsskiktet måste vara kontinuerliga. För TE har vi:

$$E + E_r = E_t, \quad B \cos \theta - B_r \cos \theta = B_t \cos \theta_t. \quad (9)$$

Enligt diskussionen ovan förekommer vinklarna i TE-fallet bara för magnetiska fältet. En fråga kan nu vara: är inte alla fysikaliska storheter kontinuerliga? Nej, det kan finnas elektrisk laddning i själva skiktet<sup>6</sup> fast det är tunt. Vi återkommer till den diskontinuiteten i sektion 5.1.

Resten av Maxwells ekvationer ger relation mellan  $E = |\mathbf{E}|$  och  $B = |\mathbf{B}|$ :

$$0 = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} + i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \quad (10)$$

och absolutbeloppet ger (eftersom  $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$  får vi ingen ny information om riktningar):

$$\omega B_0 = k E_0 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\omega}{k} B = \frac{kc/n}{k} B = \frac{c}{n} B. \quad (11)$$

Våghastigheten är  $v = \omega/k$ , och jag använde brytningsindexet  $n = c/v$ , så  $\omega = kv = kc/n$ .

Kommentar: vi hade inte kunnat ta Maxwell-ekvationen med  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  direkt, för den modifieras en aning i mediet, se t.ex. Jackson [4] sektion 7.1.

### 3.6 Fresnels ekvationer, äntligen

Från (9), (11) får vi reflektionskoefficienterna för TE-mod, och liknande för TM-mod ger

$$r_{\text{TE}} = \frac{E_r}{E} = \frac{\cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (12)$$

$$r_{\text{TM}} = \frac{E_r}{E} = \frac{-n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (13)$$

Här är  $n = n_2/n_1$  det relativa brytningsindexet. Notera att Pedrotti använder samma symboler för  $E$  och  $E_r$  i både (12) och (13), fast de är olika uttryck.

**Övning 1:** visa Fresnels ekvationer (12) och (13). Lösning i appendix.

Om du nu har glömt det jag försökte förklara i början kan du undra: måste vi alltså skicka in noggrant polariserat ljus med bara t.ex. TE-mod för att Fresnels ekvationer skall gälla? Nej, vi får göra komponentuppdelningen hur vi vill, så länge vi minns att vi i allmänhet har både TE-mod och TM-mod samtidigt. Poängen är att ekvationerna är enklast möjliga för just den här uppdelningen i linjärpolariserat ljus relativt gränsskiktet (TE) och "resten" (TM).

<sup>6</sup>En annan petig ord-grej: det "finns" förstås alltid elektrisk laddning så fort vi har atomer, som har elektroner i sig. Det som åsyftas här är nettoladdning: atomer är neutrala.

Ett instruktivt specialfall är ljus vinkelrätt mot gränsskiktet,  $\theta = 0^\circ$ , då (12) ger följande:

$$R = r_{\text{TE}}^2 = \left(\frac{E_r}{E}\right)^2 = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 \quad (14)$$

och jag beaktade kvadraten på amplituden, som ger effekten. Till exempel för TE-mod från luft till glas,  $n = 1,5$ , blir bara  $((1 - 1,5)/(1 + 1,5))^2 = 0,2^2 = 4\%$  reflekterat vid rakt infallande. Det låter rimligt att det mesta ljuset går igenom glas. Men reflektion och överföring (transmission) beror på våglängd: glas släpper nästan inte igenom någon elektromagnetisk strålning för  $\lambda < 200$  nm eller  $\lambda > 4000$  nm [6] (utanför synliga spektrat).<sup>7</sup>

### 3.7 Fresnels ekvationer och riktigt ljus

Riktigt ljus kan ha andra sorters polarisering, som cirkulärpolariserat, eller vara opolariserat. Det som skiljer ljus som är polariserat på olika sätt är relativa faser mellan polariserings-basvektorerna. Opolariserat ljus (helt eller delvis) är en "statistisk blandning" av polariseringar, som betyder att vi bara anger hur många procent av varje. Relativa faser är okända i opolariserat ljus. (Här kan du behöva gå tillbaka till kapitlet *Production of Polarized Light*, kap.15 i min upplaga av Pedrotti.) Eftersom  $R$  i ekv. (14) blir 4% både för TE och TM (fortfarande  $\theta = 0^\circ$ ) så blir det 4% även för opolariserat ljus.

Ett konkret sätt att producera polariserat ljus ser vi i formeln för  $r_{\text{TM}}$  ovan, alltså ekv. (13): den kan bli noll. Jag plottar  $r_{\text{TE}}$  och  $r_{\text{TM}}$  och för luft-glas,  $n = 1,5$ , till höger. Vi kan härleda ett exakt uttryck för nollstället: ekv. (13) är noll då  $n^2 \cos \theta = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}$ , då är  $n^4 \cos^2 \theta = n^2 - \sin^2 \theta$ , med lösningen (prova!)

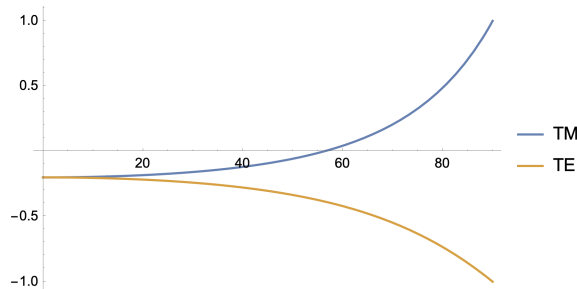
$$\theta_B = \arctan n \quad (15)$$

som kallas Brewster-vinkeln. För luft-glas får vi  $\theta_B = \arctan 1,5 = 56^\circ$ , som stämmer med figuren.

Ett vardagsexempel är om du är och badar på stranden, då opolariserat solljus faller in från luft ( $n_1 \approx 1$ ) till vattenyta ( $n_1 \approx 1,3$ ). Vid vinkeln  $\theta_B = \arctan 1,3 = 52^\circ$  reflekteras bara TE-moden. Det är en vinkel som förekommer på riktigt, och kan då stoppas av polaroidglasögon.

För solceller skulle det kunna uppstå t.ex. om solljus reflekteras mot en byggnad. Det är nog inte så relevant i allmänhet.

Ett effektivt matematiskt-geometriskt sätt att sammanfatta alla möjliga polariseringar, inklusive mellanfall som "53% elliptiskt polariserat" är [Poincaré-sfären](#), där polarisering representeras som en punkt i ett klot<sup>8</sup>. Det är en vidareutveckling av Stokes-parametrarna, som i sin tur är en generalisering av Jones-matriser, som Pedrotti tar upp i kap.14, *Matrix treatment of polarization*, och som också beskrivs t.ex. i Jönssons bok [1]. Jones-matriser är en bra grund. Begränsningen, som Pedrotti nämner i en fotnot, är att de inte kan beskriva ljus som är delvis polariserat eller opolariserat, vilket verkligt ljus alltid är. Hur solljus i sig är polariserat återkommer jag till i sektion 5.



## 4 Interferens i tunna skikt

Grundidéerna här är gymnasiefysik (t.ex. Ergo Fysik 2 kap.5), förklaringen av varför det ser ut som "regnbågar" på såpbubblor eller i olja på marken. Det uppstår från interferens i tunna skikt, där "tunn" betyder mikrometer, samma storleksordning som våglängd hos synligt ljus. Det är kap.22 i

<sup>7</sup>Den intressanta frågan "kan man bli solbränd genom glasfönster?" verkar inte ha något enkelt svar: både UVA (315-400 nm) och UVB (280-315 nm), då huden producerar [melanin](#), har  $\lambda > 200$  nm, men nära gränsen beror det på vilken sorts glas.

<sup>8</sup>Du kan ha stött på [Bloch-sfären](#) förut. Men det var förstås Poincarés optik som inspirerade Blochs kvantfysik, inte tvärtom.

min upplaga av Pedrotti. Diskussionen är snarlik den ovan, men nu är  $n_0$  i luften,  $n_1$  är ett tunt skikt på, och  $n_s$  är *substratet*, det som skiktet ligger på, för oss t.ex. glaset. (Jag skriver "t.ex." för vi vill senare prata om flera filmer, och/eller att skiktet är på glaset som i sin tur ligger på kiset.). Villkoret att elektriska fältet är kontinuerligt är:

$$E_a = E_0 + E_{r1} = E_{t1} + E_{i1}, \quad E_b = E_{i2} + E_{r2} \quad (16)$$

och för magnetfältet:

$$B_a = B_0 \cos \theta_0 - B_{r1} \cos \theta_0 = B_{t1} \cos \theta_{t1} - B_{i1} \cos \theta_{t1} \quad (17)$$

$$B_b = B_{i2} \cos \theta_{t1} - B_{r2} \cos \theta_{t1} = B_{t2} \cos \theta_{t2}. \quad (18)$$

Nu borde det kännas bekant redan från gymnasiefysiken att det viktiga för interferens mellan två vågor är *vägskillnaden*. När  $E_{i2}$  blir  $E_{t1}$  är vägskillnaden

$$\Delta_1 = n_1 t \cos \theta_{t1} \quad (19)$$

där  $t$  är skikt-tjockleken och  $n_1$  alltså brytningsindex i skiktet. (Gymnasie-exemplen är oftast i luft,  $n \approx 1$ , men här har vi  $n_1$ .) Då får vi att  $E_{i2} = E_{t1} e^{-i\delta}$  där  $\delta = k_0 \Delta_1$ . På samma sätt  $E_{i1} = E_{r2} e^{-i\delta}$ . Som tidigare använder vi  $B = E/v = (n/c)E$ . Nu kan vi lösa ut

$$\begin{pmatrix} E_a \\ B_a \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \delta & i\gamma_1^{-1} \sin \delta \\ i\gamma_1 \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}}_{M_{ab}} \begin{pmatrix} E_b \\ B_b \end{pmatrix} \quad (20)$$

där  $\gamma_1 = (n_1/c) \cos \theta_{t1}$ . Nu har vi något fantastiskt: en matris  $M_{ab}$  som beskriver hela förloppet. Den kallas *transfer-matrisen*. Om en matrismultiplikation tar oss från  $b$  till  $a$ , så skulle två matrismultiplikationer ta oss från  $c$  genom  $b$  till  $a$ , och så vidare:

$$\begin{pmatrix} E_a \\ B_a \end{pmatrix} = M_{ab} \begin{pmatrix} E_b \\ B_b \end{pmatrix} = M_{ab} M_{bc} \begin{pmatrix} E_c \\ B_c \end{pmatrix} = \dots \quad (21)$$

Vid vinkelrätt infallande är  $\cos \theta_{t1} = 1$ , så  $\gamma_1 = n_1/c$ , och vi kan som tidigare lösa ut förhållandet mellan elektriska fältet som reflekteras tillbaka och det som kommer in:

$$r = \frac{E_{t1}}{E_0} = \frac{n_1(n_0 - n_s) \cos \delta + i(n_0 n_s - n_1^2) \sin \delta}{n_1(n_0 + n_s) \cos \delta + i(n_0 n_s + n_1^2) \sin \delta} \quad (22)$$

så  $R = |r|^2$  blir (övning i komplexa tal!)

$$R = \frac{n_1^2(n_0 - n_s)^2 \cos^2 \delta + (n_0 n_s - n_1^2)^2 \sin^2 \delta}{n_1^2(n_0 + n_s)^2 \cos^2 \delta + (n_0 n_s + n_1^2)^2 \sin^2 \delta} \quad (23)$$

Till exempel för  $\text{ZrO}_2$  ( $n = 2,1$ ) på glas kommer ljus med  $\lambda = 589$  nm att reflekteras med  $R = 17\%$ .

Plottar man  $R$  i ekv. (23) som funktion av vägskillnaden  $\Delta_1$  så ser man att för  $t = \lambda/4$ , ett "kvartsvågs-skikt", så har  $R$  ett minimum. Det är för att en *halv* våglängds vägskillnad ger destruktiv interferens, och vägskillnaden fram och tillbaka i filmen är  $2\Delta_1$ . Minimat ser vi som följer i ekv. (23). För  $t = \lambda/4$  är fasskillnaden  $\delta = 0$  och eftersom  $\sin 0 = 0$ ,  $\cos 0 = 1$  ger ekv. (23) helt enkelt

$$R = \left( \frac{n_0 n_s - n_1^2}{n_0 n_s + n_1^2} \right)^2. \quad (24)$$

Vi kan då hitta vad brytningsindex  $n_1$  skall vara hos ett optimalt skikt så att inget skall reflekteras,  $R = 0$ . Om substratet är glas,  $n_s = 1,52$ , och ljuset infaller i luft,  $n_0 \approx 1$ , så får vi enligt ekv. (24)

$$R = 0 \quad \text{om} \quad n_1 = \sqrt{n_0 n_s} = 1,23. \quad (25)$$

Vilket brytningsindex  $n_1$  hos det tunna skiktet som verkligen är praktiskt beror på teknik hur man deponerar tunna skikt, det måste ju hålla också. Pedrotti tar exemplet  $\text{MgF}_2$ , med  $n_1 = 1,38$ , som tar ned reflektion från 4% till 1%. Inte till noll, men 1% kanske räcker för en del tillämpningar.

På [PVEDucation](#) har de interaktiva plottar av ovanstående ekvationer för kisel, som är risigare än glas: runt 30% reflektion utan anti-reflektions-film på. Principen borde vara klar om du har gått igenom ovanstående beräkningar: kvartsvågs-film  $t = \lambda/4$  och  $n_1 = \sqrt{n_0 n_s}$ .

**Övning 2:** plotta  $R(\lambda)$  som på [PVEDucation](#) för några värden på  $n$  och  $t$ , t.ex. i Mathematica.

Som vanligt, lösningsskiss till övningen i appendix, men fundera lite själv först.

## 5 Från solen till jordytan: varför himlen är blå och moln är vita

I vuxet vardagstal kan himlen är blå användas som att självklart faktum ("har du tänkt säga nu att himlen inte är blå?"), och påpekar man att det inte är bokstavligen sant ("nja, den är ju röd vid solnedgång och svart på natten") verkar det som hårklyveri. Men när man pratar med barn kommer ibland den naturliga frågan: varför är "rymden" svart på dagen? Solen lyser ju dygnet runt i vårt solsystem, även utanför atmosfären. Himlens färg är tydligen inget universellt i sig, utan en specifik kombination av hur jord-atmosfären sprider ljus och var du befinner dig på jordytan relativt solen.

Vad har himlens färg att göra med solpaneler? Ljuset kommer till oss genom atmosfären, dels det gulvita ljuset i rät linje från solen till solpanelen, dels via att himlen lyser i blått. Dessutom, när det är molnigt får man mindre solenergi, men inte noll.

*Spridning* är när ljuset träffar på någonting. Luft och moln är ju någonting. Vi kan gruppera spridning mot atmosfärspartiklar i små och stora partiklar:

- [Rayleigh-spridning](#) (mot partiklar som är mycket mindre än ljusets våglängd, t.ex. luftmolekyler)
- [Mie-spridning](#) (partiklar av jämförbar storlek med ljusets våglängd, t.ex. små vattendroppar).

Konceptuellt kan man först försöka förstå Rayleigh-spridning, sedan betrakta Mie-spridning som en variant. Pedrotti försöker inte förklara Rayleigh-spridning utan hänvisar till [Feynman Lectures, kap I-32](#). Sättet Feynman analyserar det på är att elektroner i atomer är som små antenner som kan absorbera och åter-emittera strålning. Via några intuitiva men rätt luriga argument ger det total utstrålad effekt  $P$ :

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^2} \quad (26)$$

för laddning  $q$ , tidsberoende acceleration  $a$  och naturkonstanter  $\epsilon_0$  och  $c$ . Det här uttrycket för effekten  $P$  kallas *Larmors formel*. Argumentet förklarar också att ljuset kommer att vara polariserat efteråt, som från en antenn.

En av grunderna i optikböcker som Pedrotti är Huygens princip från 1678: varje punkt på en vågfront är själv en källa. På [Wikipedia-sidan om Huygens princip](#) diskuteras friskt, och förvirrat, att Huygens princip borde följa från atomfysik, att de små punktkällorna (Feynmans "antennor") faktiskt är elektroner i mediets atomer.<sup>9</sup>

Det har sedan Feynmans tid klarnat mer hur Rayleigh-spridning passar in i elementarpartikelfysik. Förklaringen av varför himlen är blå ur mikroskopisk synpunkt är ett grundläggande exempel på metoden "effektiv fältteori", som jag tar upp i min text "Vad är kvantfältteori?". Den metoden utgör ett systematiskt sätt att separera frågan om elektronen har någon utsträckning (vilket den inte har i standard-partikelfysik) från mätbara processer som Rayleigh-spridning.

<sup>9</sup>Det är förståeligt att det är förvirrat: Wikipedia-skriventerna har nog läst Feynmans diskussion av Rayleigh-spridning, och han skriver att det inte var riktigt känt på den tiden. En del av diskussionen behandlar elektronen som en liten laddad sfär med radie någon femtometer. Det motsägs av elektronen såvitt vi vet är en elementarpartikel utan radie. Mer specifikt: den experimentella övre gränsen för elektronradien är någon attometer ( $10^{-18}$  m). En sfär med en femtometers radie vore en jättestor klump jämfört med en med en attometer i radie. Att elektronen skulle vara en sådan jättekul är definitivt uteslutet av experiment.

## 5.1 Rayleigh-spridning i mer detalj

Jag går igenom lite hur man får de inkommande och spridda elektriska fälten från Maxwells ekvationer med Greens-funktions-metoden i appendix D, utifrån Jackson [4] ekv. (10.1), (10.2), svaret blir:

$$\mathbf{E}_{\text{inc}} = \hat{\epsilon}_0 E_0 e^{ik\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{E}_{\text{sc}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \quad (27)$$

där  $\mathbf{p}$  är dipolmomentet, som för en dielektrisk sfär med dielektrisk konstant  $\epsilon_r$  (avvikelse från vakuum som är  $\epsilon_r = 1$ ) och radie  $a$  är

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} a^3 \mathbf{E}_{\text{inc}} \quad (28)$$

Dielektriska konstanten  $\epsilon_r$  för ett material är relaterat till brytningsindex  $n$ , som jag kommer att skriva om det som snart. (Blanda inte ihop  $\epsilon_r$  med polarisations-vektorn  $\hat{\epsilon}$ , och heller inte med Coulombs konstant  $1/(4\pi\epsilon_0)$ .) Beviset av ekv. (27) och (28) är i stil med det vi gör i *Matematisk fysik* för en ledande sfär i ett förut homogent elektriskt fält  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  (se t.ex. [den videon](#)). Men här har vi ett dielektriskt material istället för ledande, som ger följande gränsvillkor istället för  $\phi(r = a) = 0$ :

$$\left. \frac{\partial\phi_{\text{in}}}{\partial\theta} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial\phi_{\text{ut}}}{\partial\theta} \right|_{r=a}, \quad \left. \epsilon \frac{\partial\phi_{\text{in}}}{\partial r} \right|_{r=a} = \epsilon_0 \left. \frac{\partial\phi_{\text{ut}}}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (29)$$

I synnerhet, om  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 \neq 1$  så är radiella derivatan av elektriska potentialen diskontinuerlig när vi korsar sfärens yta (gränsskiktet) vid  $r = a$ . Potentialen utanför,  $\phi_{\text{ut}}$  blir som för det ursprungliga homogena fältet plus det från en dipol med dipolstyrkan i ekv. (28). Här är en övning att koppla till *Matematisk fysik*, som vanligt med lösnings-skiss i appendixen:

**Övning 3:** visa att lösningen av Laplace-ekvationen  $\nabla^2\phi = 0$  med randvillkoren (29) ger (28).

Differentiella (vinkelberoende) tvärsnittsarean är förhållandet mellan inkommande energidensitet och spridd energidensitet:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2 |\hat{\epsilon}^* \cdot \mathbf{E}_{\text{sc}}|^2}{|\hat{\epsilon}_0^* \cdot \mathbf{E}_{\text{sc}}|^2} = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_0)^2} |\hat{\epsilon}^* \cdot \mathbf{p}|^2 \quad (30)$$

som har enheten tvärsnittsarea per vinklelement på grund av  $1/r$ -beroendet hos spridda vågen  $\mathbf{E}_{\text{sc}}$  i ekv. (27), som leder till att vi måste multiplicera med  $r^2$  för att få något som går att jämföra mellan "in-våg" (plan) och "ut-våg" (sfärisk). Om vi stoppar in  $\mathbf{p}$  från ekv. (28) i ekv. (30) ger det

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 a^6 \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2 |\hat{\epsilon}^* \cdot \hat{\epsilon}_0|^2. \quad (31)$$

Man kan nu studera tvärsnittet för olika polariseringar och räkna ut att ljuset som sprids i stor vinkel är mest polariserat. Men nu tar vi medelvärde över polariseringar, som ger differentiella tvärsnittets vinkelberoende  $\frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta)$ , och integralen över alla vinklar ger totala tvärsnittet

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{8\pi}{3} k^4 a^6 \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2. \quad (32)$$

Nu betraktar vi densitet  $N$  molekyler (antal/m<sup>3</sup>). Volymen av en sfär med radie  $a$  är som bekant  $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ , så vi kan skriva  $N = 1/V$  per kubikmeter, alltså är

$$\frac{8\pi}{3} a^6 = \frac{8\pi}{3} \frac{V^2}{(\frac{4}{3}\pi)^2} \propto \frac{1}{N^2}. \quad (33)$$

Tvärsnittet blir proportionellt mot  $1/N^2$ :

$$\sigma \approx \frac{k^4}{6\pi N^2} (\epsilon_r - 1)^2 \approx \frac{2k^4}{3\pi N^2} (n - 1)^2 \quad (34)$$



för brytningsindex  $n - 1 \ll 1$ . Dämpnings-(attenuerings-)koefficienten  $\alpha$  (jfr. Physics Handbook) i  $I = I_0 e^{-\alpha x}$  ges då av (antal/m<sup>3</sup>) · m<sup>2</sup>, som ger enheten inversa meter:

$$\alpha = N\sigma \approx \frac{2k^4}{3\pi N}(n - 1)^2 \quad (35)$$

och för atmosfären är  $n \approx 1,0003$ . Minns nu från statistisk fysik att luftdensiteten sjunker ungefär exponentiellt med höjd i atmosfären, så den är inte så tjock som man skulle kunna gissa. Dämpningslängden  $\ell = 1/\alpha$  blir enligt ekv. (35) runt 30 km för violett (410 nm), 77 km för grönt (520 nm) och hela 188 km för rött (650 nm). När solen är rakt upp (zenit) är det bara kanske 1 mil (10 km) att gå igenom, därför blir inget synligt ljus särskilt dämpat, inte ens violett, så solen ser vit ut. Men vid soluppgång/solnedgång då ljuset går igenom *flera* mil luft så kommer nästan inget violett eller grönt igenom, och bara rött blir kvar, som har ca 19 mil dämpningslängd. Hade  $\sigma$  inte berott så starkt på våglängden som  $\propto 1/\lambda^4$  så skulle flera mil kontra en mil inte ha spelat så stor roll.

Astronauter i rymdstationen ISS ser solnedgångar där ljuset passerat ungefär dubbelt så långt genom atmosfären. De är extra-röda solnedgångar, som ofta beskrivs som vackrare än från jordytan. Om  $\sigma$  hade berott ännu starkare på våglängden än  $\propto 1/\lambda^4$  skulle de inte ha sett något ljus alls.

Det här gällde hur mycket av *direkt* solljus som *försvinner* jämfört med om vi inte hade haft atmosfär (som på månen), dvs. att själva sol-skivan och dess närmsta omgivning kan avvika från att se helt vit ut. Diskussionen om himlens färg gäller tvärtom *indirekt* solljus, den del av himlen som hade varit svart om vi inte haft atmosfär, dvs. för den delen av himlen är frågan hur mycket ljus som *tillkommer*. Det blir återigen det som sprids mest, alltså violett. Men eftersom det finns mindre violett till att börja med så blir det mest blått kvar, och dessutom är våra ögon mer känsliga för blått än violett: [färgsyn](#) är ett komplicerat koncept.<sup>10</sup>

Maxwell skrev till Rayleigh att ekv. (35) visar att det finns atomer/molekyler! [4] För om antalet spridare  $N$  går mot oändligheten så går dämpningen (attenueringen)  $\alpha$  mot noll.

## 5.2 Liten kommentar om fiberoptik

Det är också en intressant förklaring ([4] s.470 i min upplaga) att Rayleigh-spridning dominerar för förluster i fiberoptiska kablar för kortare våglängder än ungefär 1,5  $\mu\text{m}$ , med minimiförlust runt 0,2 dB/km. Sedan för längre våglängder tar infraröd absorption över. Även där kan vattenmolekyler orsaka spridningstoppar, nu alltså vattenmolekyler som råkat hamna i själva glaset i fiberoptikkabeln.

## 6 Ljuset träffar solpanelen

All fysik är en balansgång mellan fundamental fysik (som härledning av Fresnel-ekvationerna från Maxwells ekvationer) och *fenomenologi*, som man ofta behöver för att koppla till verkligheten, där man inte har tid eller motivering att härleda varenda steg från kärnfusionen i solen fram till vad t.ex. solpanelen alstrar för ström. Det jag mer specifikt skippar här, men gärna skulle utveckla lite om i framtiden, är hur Mie-spridning (se ovan) leder till en lite mer komplicerad formel än Rayleigh-spridning, med sfäriska Bessel-funktioner. En bra förklaring av ett experiment med ljus mot små plastkuler av olika radie, som går över från Rayleigh till Mie, finns i [12].

Här bakar vi ihop all intressant ljusspridning i atmosfären till en *himmelsmodell*. Ett exempel från [PV education](#) är intensiteten  $I_D$  hos direkt solljus för olika infallande vinklar, alltså olika luftmassa (*air mass* = AM) som solljuset tar sig igenom, enligt bok av Meinel & Meinel från 1976 [14]:

$$I_D = 1.353 \cdot 0.7^{\text{AM}^{0.678}} \quad (36)$$

<sup>10</sup>En naturlig reaktion här är: *men jag har tagit kort på himlen, den ser blå ut även i kortet*. Visar inte en kamera hur färgerna verkligen är, oavsett hur våra ögon funkar? Nej, vanliga kameror är byggda för att emulera människoögas funktion, dvs. färgerna i ett kort skall vara en bra approximation av det vi ser direkt. Annars skulle folk tycka att det är fel på kameran. Spektrat av inkommande solljus, dvs. hur mycket intensitet det är i varje våglängdsintervall, är mer människo-oberoende, och där är det lite mer violett än jag tycker det syns med blotta ögat.

Försummar vi jordens krökning så är  $AM = 1/\cos\theta$  där  $\theta$  är vinkeln från zenit (rakt upp). Tumregeln är att om du ser en ekvation med en exponent som "0.678", som här, så är den nog anpassad från data till en viss form. Det är det jag menar med "fenomenologisk", dvs. formeln är anpassad till mätdata men försöker inte förklara *varför* formeln i sig gäller. Med andra ord, modellen är en *svart låda* (eng. *black box*), där vi bara behöver förstå indata och utdata. Det räcker en bra bit här, men nedan går vi ett steg vidare.

De på PVEducation beskriver [Strålning mot lutad yta](#). Det vore bra att ha lite koll på astronomin (deklination, osv.). Huvudfokus här är i alla fall inte att förklara var solen är, utan att för en given solposition studera:

1. solljusets väg genom atmosfären, inklusive spridning från luft (diffust) och från aerosoler
2. solljusets väg fram till solcellen inne i solpanelen (bakom smuts, hölje och pålagda ytskikt)

## 6.1 Grumlig himmel

Meinel-modellen ekv. (36) beror enbart på solvinkeln, inte på t.ex. moln, så den är "mycket enkel" i en klassificering av himmelsmodeller [15]. Nästa steg är att konstruera enkla modeller för atmosfärens *turbidity*  $T$  ("grumlighet"), ett koncept i optik som ofta används för vätskor som i kortet till höger (från Wikipedia), men som funkar för fluider mer allmänt. En av de första som studerade det var Linke redan 1922 [9]. Lite senare var Kasten [10], som kopplar till Rayleigh-spridning, som följer.



För klar himmel ("Rayleigh-himmel") ger Kasten följande uttryck för optiska tjockleken  $\delta_R$ :

$$\delta_R = 7,9 \text{ km} \cdot \alpha \quad (37)$$

där  $\alpha$  är Rayleigh-dämpningskoefficienten<sup>11</sup>, ekv. (34). Tanken är nu att jämföra optiska tjockleken  $\delta$  för den verkliga atmosfären en viss dag med  $\delta_R$  för klar himmel, och förhållandet är Linkes grumlighet:  $T_{LK} = \delta/\delta_R$ . (Kastens förbättring gör att det betecknas Linke-Kastens grumlighet  $T_{LK}$ .)

## 6.2 Klar-himmel-modell

Markus i PVcheck [13] citerar moderna klar-himmel-modeller (*clear sky models*) som Ineichen-Perez [11]. Som jag förstår det är den bättre än den enkla modellen i ekv. (36) ovan. Ineichen-Perez ger strålning vid normalt infallande ljus (*beam radiation*  $B_{ncI}$ ), vi kallar det Direct Normal Irradiance (DNI) i klar himmel<sup>12</sup>

$$\text{DNI (klar himmel)} = b \cdot I_o \cdot \exp(-0.09 \cdot AM \cdot (T_{LK} - 1)) \quad (38)$$

där  $b$  tar hänsyn till höjd över havet hos mätstationen,  $I_o$  är instrålningen från utanför atmosfären,  $AM$  är luftmassa som ovan, och  $T_{LK}$  är grumligheten. I motsats till (36) ovan är det ingen exponent för  $AM$  i exponenten. Ineichen-Perez visar i artikeln [11] att de kan definiera Linkes grumlighet  $T_{LK}$  på ett lite nytt sätt, som de kallar  $T_{LI}$ , då  $T_{LI} \approx 4$  under dagtid, som är bättre än det ursprungliga  $T_{LK}$  som varierar mellan 3,5 och 4,5.

$$\text{GHI} = cg1 \cdot I_o \cdot \cos\phi \cdot e^{-cg2 \cdot AM \cdot (fh1 + fh2(T_L - 1))} e^{0.01AM^{1.8}} \quad (39)$$

Hur man lägger ihop direkt och indirekt solljus förklaras t.ex. på [Wikipedia-sidan](#). Direct Normal Irradiance (DNI) är *beam*  $B$  ovan. Det mäts vinkelrätt mot instrålningen. Diffuse Horizontal Irradiance (DHI) är ljus som sprids från atmosfären till oss. DHI mäts (som man hör) horisontellt. Så om man skall lägga ihop direkt och indirekt strålning till GHI (*global horizontal irradiance*) får man inte

<sup>11</sup>Kasten använder symbolen " $\sigma$ ", men säger att den har enheten invers längd. Så det är en dämpningskoefficient  $\alpha$ , inte en tvärsnittsarea  $\sigma$ . Kasten får förstås använda valfri symbol, men här kan det orsaka förvirring.

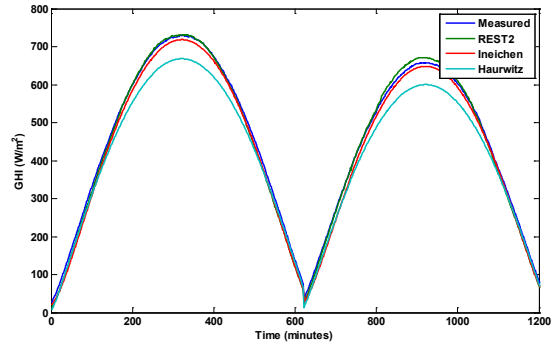
<sup>12</sup>De helgarderar med två formler för  $B_{nc}$ , varav man skall ta den som ger minst värde.

addera äpplen och päron utan måste räkna om normal instrålning DNI till motsvarande horisontella strålning:

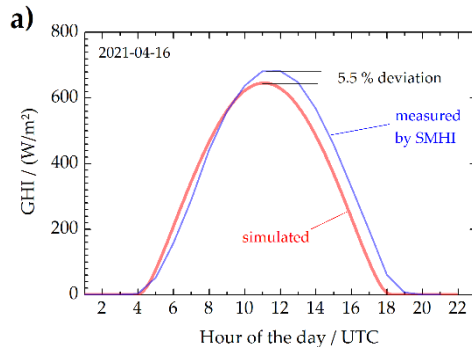
$$\text{GHI} = \text{DHI} + \text{DNI} \cos \phi \quad (40)$$

där  $\phi$  är solens vinkel i zenit.<sup>13</sup>

Folk har gjort jämförelser av klar-himmels-modeller, som i bilden till höger [15], där blå kurvan är uppmätt global horisontell instrålning (GHI). Ineichen-Perez, den röda kurvan, verkar vara en bra modell, som finns tillgänglig i Python-biblioteket `pvl`. (Det finns fler modeller på [pvlibs hemsida](#), men för oss här räcker det med en.) I [källkoden](#) hittar vi ovanstående formler ekv. (38) och (39).



Vad Ineichen-Perez klarhimmelsmodell ger för GHI visar Markus i fig.1 [13]. Modellen i sig används som svart låda i PVcheck: interpolerar grumlighet  $T_{LK}$  från databas, använder klarhimmelsmodellen ekv. (38) och ger GHI i figuren till höger. Men även med en svart låda är det viktigt att ha någon koll på vad indata och utdata betyder.



När ljuset sedan träffar solpanelen är det en *Incident Angle Modifier* (sektion 3.4 i [13]), men den spelar bara ungefär 2% roll, så inte så mycket.

Det är också viktigt vad det är för termodynamisk modell för värmeöverföring i `pvl`. Det ligger inte i linje med den här diskussionen, som fokuserar på optik, så jag har lagt det i appendix E.

## 7 Mätinstrument

En *pyranometer* (*pyr-ano* = himmelseld, ganska poetiskt!) mäter temperaturskillnad på en solsida och en skuggsida. En fördel är att sådan energitillförsel kan komma från var som helst i spektrat. En nackdel är att det är mer vagt, temperaturskillnad skulle åtminstone delvis kunna uppstå från någon helt annan källa än solen.

En fotocell, t.ex. av en specifik halvledare som kisel med specifikt bandgap, är mer specifik till just elektromagnetisk strålning. Den kan däremot inte mäta fotoner som inte "ger något utslag". Det går att avhjälpa genom att ha lager med olika halvledare med olika bandgap.

## 8 Övriga resurser

Böcker som Thorne & Blandford [5] diskuterar böjning (diffraktion) i stor detalj, men inte så mycket om gränsskikt. Det beskriver övergången mellan Fresnels teori (inte den om gränsskikt, utan om diffraktion) till Fraunhofers teori som skillnaden på närfält (*near field*) och långt-borta-fält (*far field*).

<sup>13</sup>Den kallas  $z$  på Wikipedia-sidan. Det kan verka vara förvirrande, men mitt  $\phi$  är också förvirrande, som förklaras ganska tydligt på PV-education-sidorna ovan: .

## A Lösning till Övning 1

Stoppa in  $B = (n/c)E$ ,  $B_r = (n/c)E_r$ ,  $B_t = (n/c)E_t$  från (11) i (9), det ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} E + E_r = E_t & (*) \\ n_1 E \cos \theta - n_1 E_r \cos \theta = n_2 E_t \cos \theta_t & (**) \end{cases} \quad (41)$$

Stoppa in  $E_t$  från (\*) i (\*\*) så får vi

$$n_1 E \cos \theta - n_1 E_r \cos \theta = n_2 (E + E_r) \cos \theta_t \quad (42)$$

Dela med  $E$ :

$$n_1 \cos \theta - n_1 \frac{E_r}{E} \cos \theta = n_2 \left(1 + \frac{E_r}{E}\right) \cos \theta_t \quad (43)$$

Kalla  $E_r/E = r_{TE}$ :

$$n_1 \cos \theta - r_{TE} \cdot n_1 \cos \theta = n_2 \cos \theta_t + r_{TE} \cdot n_2 \cos \theta_t \quad (44)$$

Lös ut  $r_{TE}$ :

$$r_{TE} = \frac{n_1 \cos \theta - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta_t} = \frac{n_1 (\cos \theta - \frac{n_2}{n_1} \cos \theta_t)}{n_1 (\cos \theta + \frac{n_2}{n_1} \cos \theta_t)} = \frac{\cos \theta - n \cos \theta_t}{\cos \theta + n \cos \theta_t} \quad (45)$$

där  $n = n_2/n_1$  är relativa brytningsindex. Som avslutning använder vi Snells lag  $\sin \theta = n \sin \theta_t$  som ger, från trigonometriska ettan,

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{n^2}} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \quad (46)$$

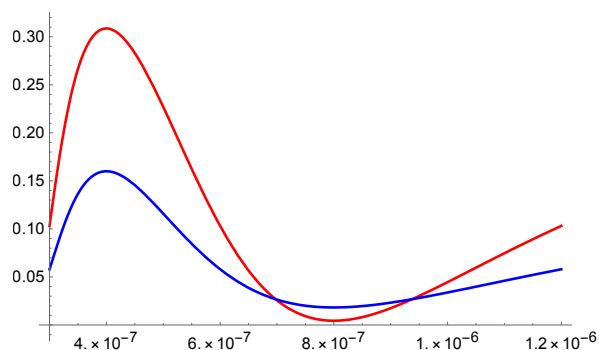
så  $n \cos \theta_t = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}$ , och det i ekv. (45) ger Fresnels formel för TE-mod, ekv. (12). Härled själv motsvarande formel för TM-mod, ekv. (13).

## B Lösning till Övning 2

På [PV Education](#) står att  $n_0$  är omgivning,  $n_1$  är ytskiktet, och  $n_2 = 3,5$  är kisel. De antar normalt infallande  $\theta_{t1} = 0$  och inför vinkeln  $\theta = 2\pi n_1 t_1 / \lambda$ . Den är relaterad till vägskillnaden  $\Delta_1 = n_1 t \cos \theta_{t1}$  i ekv. (19) så här:

$$\delta = k_0 \Delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 t \cos \theta_{t1} = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 t = \theta \quad (47)$$

i deras notation. Vi sätter nu t.ex.  $n_0 = 1$  eller 1,5, och  $n_1 = 2$ , och  $t = 100$  nm, och plottar för  $\lambda = 300$  till 1200 nm. Jag får följande plott:



En lärdom man kan dra här är att eftersom kisel självt har ganska stort brytningsindex  $n_2 = 3,5$  så behövs verkligen något ytskikt för att inte reflektera jättemycket: 10%-20% som vi ser här är alldeles för mycket för en solpanel. Vi kan också se med blotta ögat att det är rätt omöjligt att göra ett perfekt ytskikt: om det reflekterar väldigt lite för en viss våglängd kommer det ändå att reflektera för någon annan våglängd. (Å andra sidan har vi inte tagit hänsyn här till våglängdsberoende hos brytningsindex,  $n(\lambda)$ ). Man kan tänka sig ett material där beroendet i  $n(\lambda)$  kompenserar för att reflektionen annars skulle ha gått upp när vi går bort från en viss våglängd.)

## C Lösning till Övning 3

Från Jackson kap.4.4: börja som för ledande sfär. Men nu måste vi specificera problemet inuti sfären också. Utanför gör vi ansats med potens i  $r$  och Legendre-polynom i  $\cos \theta$ :

$$\phi_{\text{in}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (48)$$

och liknande innanför:

$$\phi_{\text{ut}} = \sum_{l=0}^{\infty} (B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) . \quad (49)$$

Stoppar vi in de här ansatserna för  $\phi$  i gränsvillkoren ekv. (29) får vi från det första

$$A_1 = -E_0 + \frac{C_1}{a^3}, \quad A_l = \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad (l \neq 1) \quad (50)$$

och från det andra

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} A_1 = -E_0 + 2 \frac{C_1}{a^3}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} l A_l = -(l+1) \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad (l \neq 1) . \quad (51)$$

Tillsammans tvingar de  $A_l = C_l = 0$  för  $l \neq 1$ . Kvar blir  $A_1$  och  $C_1$ , och vi kan lösa ut dem uttryckt i  $a$  och  $E_0$ . Potentialen innanför och utanför  $r = a$  blir

$$\phi_{\text{in}} = -\frac{3}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} E_0 r \cos \theta, \quad \phi_{\text{ut}} = -E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \quad (52)$$

Det är den sista termen som är den viktiga: extra-fältet utanför för att vi har dielektriskt material,  $\epsilon \neq \epsilon_0$ . Avtagandet  $1/r^2$  gör att det går att skriva som fältet från en dipol med dipolmoment:

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} a^3 E_0 \quad (53)$$

Vi kan nu också gå tillbaka och se att ekv. (52) till sin form är rätt lik den för ledande sfär i homogent elektriskt fält men det är en stor skillnad: fältet inuti sfären är nu verkligen homogent, medan vi förut när vi gick rakt igenom sfären utan diskontinuitet såg vi att det var bildladdningar inne i sfären. Här i dielektriskt material har fältet inuti inga bildladdningar, för att vi istället tillät att det är diskontinuitet vid sfärens yta, så fältet byts helt enkelt direkt till det homogena när vi går innanför ytan.

Nu definieras molekyl-polariserbarheten  $\gamma_{\text{mol}}$  som förhållandet mellan medeldipolmomentet för molekylerna och  $\epsilon_0$  gånger det påslagna elektriska fältet,

$$\gamma_{\text{mol}} = \frac{3}{N} \frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \quad (54)$$

som kallas **Clausius-Mossotti-ekvationen**. Jämförelse med mätdata i t.ex. Ingemars anteckningar [7].

## D Strålningsfält från Maxwells ekvationer

Maxwells fyra differentialekvationer av 1:a ordningen kan kombineras till två differentialekvationer av 2:a ordningen, för potentialen  $\phi$  och vektorpotentialen  $\mathbf{A}$ , i kap 6.2. i [4]. De är kopplade till varandra. Faktum är att i relativitetsteori kombineras  $\phi$  och  $\mathbf{A}$  till en fyrvektor  $A^\mu = (\frac{1}{c^2}\phi, \mathbf{A})$ . Om vi inför tvånget

$$\partial_\mu A^\mu = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (55)$$

som kallas *Lorenz-gauge*, frikopplar vi de två differentialekvationerna. (Att skriva  $\partial_\mu A^\mu$  poängterar att tvånget i sig är Lorentz-invariant, alltså observatör-oberoende.) Differentialekvationen vi får för vektorpotentialen  $\mathbf{A}$  är en inhomogen vågekvation för varje komponent:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}_t \quad (56)$$

där  $\mathbf{J}_t$  är *transversa* strömtätheten, den del av strömtätheten som har noll divergens.

Strategin är alltså: vi skall lösa ekv. (56) för vektorpotentialen  $\mathbf{A}$ , och eftersom  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$  så bestäms magnetfältet enligt  $\mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A}$ . För att bestämma elektriska fältet behövs också potentialen  $\phi$ , men antar vi det enkla tidsberoendet  $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ , och liknande för de andra storheterna, så följer  $\phi$  från tvånget ekv. (55), när vi har  $\mathbf{A}$ . Vi får då elektriska och magnetiska fälten från

$$\mathbf{E} = \frac{iZ_0}{k} \vec{\nabla} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \quad (57)$$

där  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  är impedansen hos vakuum ( $\mu_0$  och  $\epsilon_0$  är naturkonstanter som står i t.ex. Physics Handbook), och  $\mathbf{A}$  är vektorpotentialen i Lorenz-gauge:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 x' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3 x' \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3 x' \quad (58)$$

där  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$  är strömtätheten, och  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  Green-funktionen för differentialekvationen (56). När man studerar sfäriska fält långt bort från en källa som approximativt är en punkt tar fältet en ganska allmängiltig form. Regionen kallas *far field*. Jag använde därför i sista likheten approximationen  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx r$ . Vi ser att  $e^{ikr}/r$  kom från Green-funktionen.

Med partiell integrering  $\mathbf{J} \rightarrow -\mathbf{x}'(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{J})$  under integralen, samt kontinuitetsekvationen  $i\omega\rho = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{J}$ , kan vi skriva om (58) som en integral av en lägesvektor  $\mathbf{x}$  gånger rums-delen av tidsberoende laddningstätheten  $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \underbrace{\int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d^3 x'}_{\mathbf{p}} \quad (59)$$

och stoppar vi in det i (57) så ger det elektriska fältet i (27) uttryckt i  $\mathbf{p}$ , som vi skulle visa.

Konceptuellt är det viktigt att vi har återfört ett stationärt problem på ett statiskt problem. Stationärt betyder speciellt tidsberoende  $\rho(\mathbf{x}, t)$  på ett regelbundet sätt  $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ , och statiskt betyder utan explicit tidsberoende, så det är en stor förenkling. Därför räcker det att räkna ut  $\mathbf{p}$  i Övning 2 i elektro-statik, och mata in det resultatet i den här tidsberoende situationen.

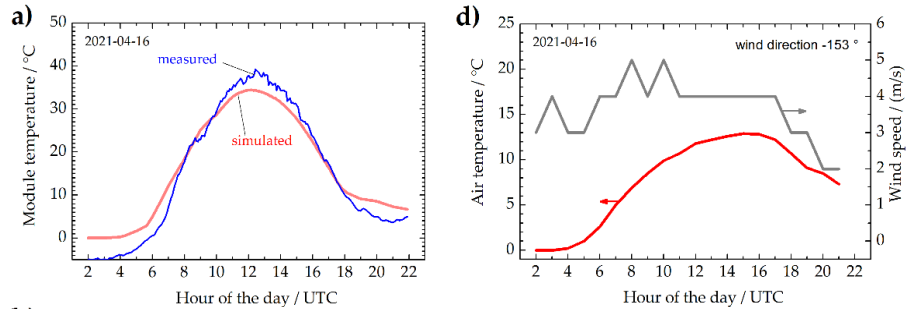
## E Termodynamik

I PVcheck [13] har Markus en termodynamisk svart-låda ur Python-biblioteket `pvlib`, se [källkod](#) och [dokumentation](#): modultemperaturen (på baksidan) är

$$T_m = E \cdot e^{a+b \cdot WS} + T_a \quad (60)$$

där  $E$  är infallande strålning i planet,  $WS$  (*wind speed*) är lufthastighet, och  $T_a$  är lufttemperatur. Modellen ger också själva solcellens temperatur  $T_C$ . (För parametrarna  $a$  och  $b$ , se nedan.)

Den förutsäger modul-temperaturen  $0^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C}$  (röd kurva till vänster) bra från lufttemperatur  $0^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C}$  samt vind 2-5 m/s, som i figuren till höger. Separat mätning av faktisk modultemperatur är blå kurvan.



Det är inte självklart hur man får bra indata. Till exempel, om man tar vindhastighet från SMHI så är det mätt på Karlstad flygplats. Lokala vindförhållanden, och inte bara lokal medelvind utan det precis runt solpanelsinstallationen, kan förstås variera mycket. Men det verkar till stor del ta ut sig över dygnsmedelvärden, så SMHI:s vind ändå är användbar indata.

Som man ser i källkodslänken ovan, input är förutom strålning  $E$  och väderdata  $T_a$  och  $WS$  är det  $a$  och  $b$  som karakteriserar vilken sorts modul det är, t.ex. glas/glas som står fritt, eller glas/plast som är isolerat på baksidan. Det måste användaren alltså tala om. För glas/glas som står fritt är  $a = -3.47$ ,  $b = -0.0594$ , för glas/plast som är isolerat på baksidan är  $a = -2.81$ ,  $b = -0.0455$ .

## Referenser

- [1] G. Jönsson, "Våglära och optik" (2018), Lund.
- [2] Pedrotti, Pedrotti och Pedrotti, "Introduction to optics" (2017), Cambridge.
- [3] D.Cheng, "Field and wave electromagnetics" (2013), Pearson.
- [4] J.D.Jackson, "Classical electrodynamics" (1999), Wiley. (Den här boken är så klassisk att den har en egen [Wikipedia-sida](#).)
- [5] K. S. Thorne, R.D. Blandford, "Modern Classical Physics" (2017), Princeton.
- [6] R. Kitamura, L. Pilon, and M. Jonasz, "Optical constants of silica glass from extreme ultraviolet to far infrared at near room temperature" (2007) Applied Optics 46, 8118-8133.
- [7] I.Bengtsson, "Comments on Jackson" (2021), [PDF](#).
- [8] W.F. Holmgren, C.W. Hansen, M. A. Mikofski. "pvlib python: a python package for modeling solar energy systems." Journal of Open Source Software, 3(29), 884, (2018). [länk](#).
- [9] F. Linke, "Transmissions-Koeffizient Und Trübungsfaktor. Beiträge zur Physik der Atmosphäre" (1922), 10, 91-103.
- [10] F. Kasten, "The linke turbidity factor based on improved values of the integral Rayleigh optical thickness" (1996), Solar Energy, Volume 56, Issue 3, p. 239-244, [länk](#).
- [11] P. Ineichen, R. Perez, "A new airmass independent formulation for the Linke turbidity coefficient" (2002), Solar Energy, Volume 73, Issue 3, p. 151-157.
- [12] A. J. Cox, Alan J. DeWeerd and Jennifer Linden, "An experiment to measure Mie and Rayleigh total scattering cross sections" (2002), Am. J. Phys. 70 (6), June 2002.
- [13] M.Rinio, "PVcheck—A Software to Check Your Photovoltaic System" (2021), Energies 2021, 14, 6757. [länk](#).

[14] A. B. Meinel, M.P. Meinel, *Applied Solar Energy* (1976), Addison Wesley.

[15] [länk](#)