Reading Guide to Polchinski's "String Theory"

Here is the reading guide, formulated as a set of quiz questions by chapter. Please *write down* your solutions to the quiz questions for yourself. There is a "solution manual" PDF for the quiz questions: when you are done with a chapter, grade your written responses, and report to the teacher how many points you gave yourself.

Translated to English so far: 1,2,7,10. If you found them useful, let me know and I'll do the rest.

Chapter 1

1. **Point particle in curved space.** It's a standard calculation in general relativity that the point particle action S_{pp} gives the geodesic equation:
   Wikipedia: Geodesics in general relativity
   under "Deriving the geodesic equation via an action". For example, for a black hole this tells us which trajectories fall in. It says *"Since the four-velocity is normalized to -1..."*, why is that? And if the four-vector magnitude is constant and equal to -1, isn't its variation identically zero?

2. **Are there massless bosons X in 2 dimensions?**
   Hopefully there are, since X appears everywhere in the book! But there is an issue: the equation of motion of the boson X is the Laplace equation in 2 dimensions. What is the long-distance ($r \to \infty$ in polar coordinates) behavior of the Green's function for the Laplace equation in 2 dimensions? Would you say this means X doesn't really make sense?

   Really, we will mostly function(al)s of X, like the derivative field ∂X. How does the Green's function for ∂X behave $r \to \infty$? Is that any better?

   After you've addressed these two questions, also read about the Mermin-Wagner theorem, and note the connection to the nobel prize for physics 2016 and the Kosterlitz-Thouless phase transition.

3. **Extra dimensions.** In popular-science accounts of string theory, one often hears that the extra dimensions must be "small and curled-up", as they were in Kaluza-Klein theory.
   (Question for detectives: can you see Oskar Klein's tombstone on his Wikipedia page? What other famous Swedes are buried at Stockholm *North Cemetery*?) Kaluza-Klein theory doesn't appear in full until Chapter 8[1]

   Since 1998 or so, there is also the alternative that the extra dimensions are not small and curled up at all, but big. In some models, "big" means a few micrometers, but there are also "warped" models where the extra dimensions can be infinite! You can picture "warped" here in the sense of warped wood, as opposed to curved more generally. In particular, a single extra dimension cannot have intrinsic curvature in the sense of Gauss so it would be confusing to call it a "curved extra dimension", but warping refers to the embedding of the extra dimensions in the total space of our dimensions + extra dimensions, i.e. extrinsic geometry. For example, if the normalization of the metric of our dimensions depends on where we are in the extra dimensions, this can give gravitational effects.

   Here's a question: from general relativity, you might have seen examples where a metric component in some direction depends on a coordinate in another direction, like $g_{tt}(r)$ in the

[1] To be pedantic, Kaluza-Klein theory as Kaluza and Klein pictured it will not appear at all, since it was quickly ruled out by non-observation of the "radion", a hypothetical massless scalar field that represents the 55 component of the 5-dimensional metric. Also, "Kaluza-Klein theory" is not a single set of ideas: Kaluza's theory was completely classical (with a modern successor in Brans-Dicke theory, which is not ruled out but very restricted by experiments), but Klein's theory was supposed to be quantum-mechanical, and explain the physics of the electron. Einstein liked Klein's theory and briefly called it an "alternative to quantum mechanics", but the theory failed miserably to recreate the mass of the electron, for example. So a more correct statement would be that Chapter 8 is about "generalizations of certain basic aspects of the nice ideas of Kaluza, Klein and others about extra dimensions".

Schwarzschild metric. Can you make a simple argument how warping could prevent us from noticing big extra dimensions?

Such a "brane world" is motivated by D-branes (hypermembranes Chapter 13), that our dimensions are located on a distinguished hypersurface embedded in the extra dimensions:
Wikipedia: Randall-Sundrum model
It is possible to think about this without knowing much about D-branes, in fact those papers use very little string theory.

4. **Is the embedding an embedding?**
Perhaps the most fundamental object in string theory is the *embedding* $X^\mu(\tau, \sigma)$ from the worldsheet (τ, σ) to D-dimensional space ($\mu = 0, \ldots, D-1$). It would be a little embarrassing if the embedding wouldn't qualify as an embedding in the mathematical sense, for example if it was only an *immersion*:
Wikipedia, Immersion (mathematics)
In particular, immersion versus embedding is a global issue. Read footnote 4 (p.18) in the book and try to explain to an imaginary mathematician (or ever better, an actual mathematician!) whether string theorists really mean that $X^\mu(\tau, \sigma)$ is an embedding in the mathematical sense.

5. **Is the embedding even an immersion?**
The previous question was about global geometry. What about local geometry: is $X^\mu(\tau, \sigma)$ even an immersion, which we can take to mean *differentiable*?

   I discussed this with the (sadly deceased) Stockholm mathematician Torsten Ekedahl. The first thing he asked me was how I intend to embed a Minkowski worldsheet in Minkowski space, since generic embeddings are singular. I said, isn't it just a Wick rotation of a Euclidean-signature surface where there's no problem? Torsten was not impressed. Why?

   Or, could we conclude "experimentally" from nonsingular motion of an ordinary rope that singularities cannot arise?

   Read Polchinski's footnote 3 (p.15), and if you have access to Zwiebach's book, read the chapter mentioned in the video.

6. **"The Fundamental Theorem of Theoretical Physics"**.
This is what Bryce DeWitt called the identity "det exp A = exp tr A" for a matrix A. To a mathematician, this is a simple special case of the following:
Wikipedia: Jacobi's formula from linear algebra [2]
but it is used so often in theoretical physics that there is some point to learn it by heart: det exp = exp tr. The question is: can you see that Jacobi's formula – *before* specializing – is the same as Polchinski (1.2.15): $\delta\gamma = \gamma\gamma^{ab}\delta\gamma_{ab}$? (Warning: in the proof on the Wikipedia page, the "adjugate" matrix is not the "adjoint" matrix. If you are not a native English speaker, remind yourself of the word for "adjugate" in your language.)

7. **Topology: corners and edges**. Mathematicians call χ *Euler characteristic*, not Euler "number", since (as usual with Leonhard Euler) are at least 9 candidates for what should be called Euler number.[3] In the mathematics topic *topology*, the Euler characteristic is defined as a more abstract version of Euler's original formula for polyhedrons: χ = corners $-$ edges $+$ regions. As an example, the cube has 8 corners, 12 edges, and 6 regions. Before looking at the Wikipedia page for Euler characteristic, do you expect that the sum χ is the same for a pyramid or sphere as it is for a cube? (Smooth surfaces are further down on that page.)

[2] Just like there are myriad mathematical concepts named after Euler (47 things in the Wikipedia list at the time of writing), there are at the time of writing 23 things named after Carl Jacobi (1804-1851), so this "Jacobi formula" could potentially be confused with "Jacobi product formula" or "Jacobi identity".

[3] The main physics-oriented one is the Euler number in fluid mechanics, a little bit like a Reynolds number. In mathematics, the Euler numbers are $1, -1, 5, -61, 1385, \ldots$, the coefficients in the series expansion of $1/\cosh x$.

(The Euler characteristic has a long sequence of generalizations, beginning perhaps with the Euler class. If you've never heard of that that's fine, but you might want to get Nakahara's book right away.)

8. **Topology and geometry**. If you've read the previous question but haven't quite connected Euler's formula "χ = corners − edges + regions" with Polchinski's (1.2.31) yet, that's fine, that's the Gauss-Bonnet theorem. Taking a look at this page, try to explain in words what the difference is between the above definition of χ and Polchinski's definition.

9. **In-depth about indentations.** The first time you realize what the Gauss-Bonnet theorem says, it's pretty spectactular: the total curvature of a sphere can't be affect by local deformations. For example, if you take your finger and push a little indentation in the sphere that looks like a little pushed-in bowl, presumably that bowl is more curved than the sphere itself (smaller radius of curvature = more curved). So with an additional *positive* contribution to the curvature, how can this deformation preserve the total curvature?

10. **0.7+1.7+2.7+... = 0.02.** *(This and the next few questions are about how to efficiently skim Chapter 1.3.)* Skim to p.22 when the famous formula $1 + 2 + 3 + \ldots = -1/12$ is discussed. (If you have access to Schwartz's QFT book, compare Ch.15.3.5). Consider how you would do problem 1.5, which is to prove a variation of $1 + 2 + 3 + \ldots = -1/12$, for example $0.7 + 1.7 + 2.7 + \ldots = 0.02$. Then read Headrick's solution of problem 1.5.

11. **Lorentz group in D dimensions**. The discussion on page s.23 is about representations of the Lorentz group. Why does Polchinski talk about $SO(D)$ and not $SO(D-1, 1)$ which is (the connected part of the) Lorentz group? The group $SO(D-2)$, i.e. $SO(8)$ in $D = 10$, is the stabilizer group for *lightlike* four-vectors. What does *stabilizer* mean? It's also called (Wigner's) *little group* associated with a given vector. Once you know this, why is $SO(8)$ relevant in $D = 10$? You may consult the Lorentz group Wikipedia page.

12. **Open string with Dirichlet boundary condition**. This is about problem 1.6: spectrum for open string with Dirichlet boundary condition (ends fixed in space). If the problem is not assigned, at least think about it, contrasting with open-string Neumann boundary conditions (ends loose) in the text. Think about the details but also the motivation: why would fundamental strings ever have their ends fixed in space, if in the small-string limit they are supposed to describe elementary particles? After spending some reasonable amount of time on problem 1.6, take a look at Yin's solution.

    All of Ch.13 is about Dirichlet boundary conditions (in *D-brane*, D is for Dirichlet), so it's good to get started early! Another motivation is that strings with fixed ends are arguably the most intuitively familiar of all strings, at least if you ever played a string instrument.[4]

Chapter 2 [core]

The most logical here would be to go through a basic book like Blumenhagen & Plauschinns bok "Introduction to Conformal Field Theory – with Applications", which is more basic (also with slightly more algebraic approach) than Polchinski. But most of you don't have time for this right now, so we'll press on. A short summary is in my string notes, but it's intended to be read *after* you've studied Chapter 2.

1. **Waves in 1+1 dimensions**. What's the name for a wave propagating to the right along a 1-dimensional string, i.e. the amplitude of the string is only a function of the combination $\sigma^1 - \sigma^0$ on the worldsheet, where σ^1 is space and σ^0 is time? (cf. $f(x - vt)$ in basic wave physics, for velocity $v = 1$ in natural units, i.e. the speed of light.)

[4]This connection has led to a lot of questionable puns, like who is the Princeton String Quartet, this link or this link?

2. **Spin waves**. Before reading p.40: it is useful to be aware that many of these string/quantum-field methods are also used in statistical mechanics and condensed matter theory (cond-mat). Sometimes the method arose in string theory and was imported to these other fields, sometimes the other way around. Most string theory books don't emphasize connections to these other fields, but many physics students have studied these other fields too, and for those students there is a big potential benefit to see connections, if nothing else because the applications to systems that can be studied directly in the laboratory provides much-needed intuition for what is really going on in string theory calculations. (In addition to those other fields potentially being directly *useful*, in the usual meaning of the word "useful"!). A concrete example is spin wave theory, related to the Nobel Prize of 2016.

   For example, you may have encountered problem 11.1 in Peskin & Schroeder's book. This is about waves propagating in lattices of quantum mechanical spins (e.g. electrons). Without knowing anything about spin waves, can you guess whether the spin wave operator $e^{i\phi(x)}$, that can describe waves in a lattice of spins of fermions, is a boson or a fermion? More in detail in two dimensions: what is the (total) conformal weight $\Delta = h + \bar{h}$ and *conformal spin* $h - \bar{h}$ of $e^{i\phi(z,\bar{z})}$? How does it transform under rotations?

3. **Normal ordering.** Almost noone else than Polchinski clearly distinguishes different versions of normal ordering. By (2.7.12), is this distinction necessary, or even useful? Compare problems 2.10 and 2.13 (if those problems are not assigned, you can consider looking at Headrick's solutions, but at least read the problem statement and contemplate them).

4. **Conformal transformation.** Polchinski makes a fairly big deal (p.44) that conformal invariance is *not* invariance under diffeomorpisms (general coordinate transformations) from general relativity. But this can be confusing: isn't a holomorphic coordinate transformation a special case of a general coordinate transformation? For example, if you study Kiritsis's book, he clearly writes that conformal transformations is a special case of diffeomorphisms. How can this be consistent with Polchinski? And, what does Polchinski mean in that discussion when he writes that a mass term is not invariant under holomorphic coordinate changes on the worldsheet: X^μ is a worldsheet scalar, so isn't it invariant under coordinate changes?

5. **Conformal map.** Consider the map $z = e^{-iw}$ in fig. 2.3, where z is the "sphere coordinate" and w the cylinder coordinate $w = \sigma^1 + i\sigma^2$. (Warning: compare to eq. (2.1.12) and (2.6.4)!) Try to connect this to experience you might have with conformal mappings from basic complex analysis or electrostatics. As with any change of point of view, both z and w can be useful, and to make the most of them, it is good to develop some intution for the relation between them, like which points or lines transform where. For example, in which direction does "time" σ^2 go in fig. 2.3b? Why did I put quotation marks on "time"? Does σ^2 assume real or imaginary values?

6. **Central charge for the X^μ CFT from the Virasoro algebra**. A typical course would have 2.11 as example or hand-in problem, so please try yourself, then study Headrick's solution.

7. **Background charge** p.49. The theory of "linear dilaton" is perhaps not of central interest in itself in a first meeting with string theory, but it is equivalent to a boson with "background charge" Q, that appears in the superstring in Ch.10. For this question, let's consider a single boson X rather than the collection X^μ. If X has "background charge", that means that X couples with an extra term $\Delta\mathcal{L}_Q = QX(z)R(z)$ in the Lagrangian, where Q is the constant charge and R is the worldsheet curvature. But, according to the quiz questions above, R is topological, so then how can $\Delta\mathcal{L}_Q$ contribute to T_{ab}, which is defined by variation with respect to the metric? Also, if we picked a gauge with flat metric, isn't the curvature $R = 0$?

8. **More on background charge.** Read problem 2.7b on the linear dilaton theory if you feel like it, but it's not necessary. Headrick finishes problem 2.7 with the comment that it seems mysteri-

ous the weights come out complex. If you feel like understanding that, read Problem 3.2.b in McGreevy's course String Theory 8.821 (2007).

9. If you have studied Fuchs & Schweigert (or equivalent), can you connect the discussion of the three generators L_0 and $L_\pm$ in Polchinski Ch. 2.6 to theirs on representations by differential operators? In particular, how does Polchinski's algebra SL differ from their algebra $\mathfrak{sl}$?

Chapter 3

I allmänhet: läs översiktligt det som handlar om ränder (boundaries) för öppna strängar, t.ex. s. 95-96. Vi behöver det egentligen! Men det blir lite mycket om du skall gå igenom varje detalj, utan fokusera mer på slutna strängar i de "formella" kapitlen 3-5, med några undantag.

1. **Icke-orienterbarhet.** s. 100. Vad betyder det att en yta är "icke-orienterbar" (*unorientable*) ? Försök förstå vad en "crosscap" är.
   https://en.wikipedia.org/wiki/Cross-cap

2. **Gaugeval för metriken.** (3.3.2) "fiducial metric" = förankrings-metrik på svenska, dvs. en metrik som man sedan kan jämföra andra metriker med. Varför tror du det är användbart att införa det konceptet, och notationen $\hat{g}_{ab}$ med hatt?

3. **Elektrostatik.** s.85 "standard argument from electrostatics", vad är det?

4. **Kulturaspekten av konforma transformationer.** "Locally there is a bit of extra gauge freedom", det är den symmetrin som hela kapitel 2 handlade om, så det verkar vara viktigt att förstå. I synnerhet, hur definierar Polchinski "konform transformation" egentligen? Jämför i Glossary (ordlistan) i slutet av boken.

5. **Tensorer och differentialoperatorer.** Läs Headricks lösning till 3.2 och 3.3. Det är inte helt lätt att komma på det själv om man inte läst relevant matematik! Sammanfatta två huvudpoänger, t.ex. vad vet man om en spårlös symmetrisk tensor? Vad vet man om kovarianta derivator av tensorer med bara z-index och inga $\bar{z}$?

6. **Lokalt/globalt.** s.89. "locally on the worldsheet", det syftar på diskussionen i kap.5 och kap. 7 att det som står här i kap. 3 måste kompletteras dels med en diskussion om moduli (globala parametrar), dels en diskussion av globala ("stora") diffeomorfier.

7. **Kan världsyteteorin i strängteori ha central laddning?** Kap. 3.4. Poängen är ekvation (3.4.15). ("A slightly longer route" på s.93 kan vara svår att förstå, läs översiktligt.) Måste vi alltså kräva att centrala laddningen $c = 0$? (Det verkar först konstigt, dels för att vi ägnade tid åt c i kap.2, dels för att X^μ-CFT:n ju faktiskt har $c = D = 26$.)

8. **Spökverkan.** Slutklämmen i kap.3.3 är alltså (3.3.24): gaugefixering av banintegralen utan externa tillstånd (vakuumamplituden) leder till en Lagrangefunktion för b och c som väsentligen är $b\bar{\partial}c$, och vi identifierar den med bc-CFT:en på s. 50. Är vi inte klara då?

9. **Vertexoperatorer**. Kap 3.6. Diskussionen på s. 102 verkar ganska abstrakt, men enligt (3.6.5), normalordning i krökt (tvådimensionellt) rum, är den egentligen ganska konkret, jag tänkte göra det på tavlan. I (3.6.14) tycker jag det räcker att förstå hur det funkar för gravitonen, så sätt $a_{\mu\nu} = \phi = 0$. Vad är det du tappar då?

10. **Weyl-anomalier.** Hur är (3.7.12) konsistent med den tidigare diskussionen under (3.4.7)? Det verkar som att T^a_a på sin höjd får ha R, men i (3.4.7) har man mycket mer.

11. **Allmän relativitetsteori från strängteori.** "It is striking that Einstein's equation turns up in what seems to be a rather out-of-the-way place". Tänk igenom om du förstår det här stycket, det är väldigt djupt! I synnerhet, får man bara vakuum-Einstein-ekvationen $\mathbf{R}_{\mu\nu} = 0$, eller hela Einsteintensorn och $\mathbf{G}_{\mu\nu} = \kappa\mathbf{T}_{\mu\nu}$?

12. **Vilka strängteorier finns det?** s.117: försök sammanfatta den här diskussionen om generalisering av strängteorier i egna ord, i några meningar.

Kapitel 4

Du kan skippa punktpartikel-BRST om du vill. Om du läser det, kom ihåg att det bara finns en tidsvariabel τ på världslinjen och ingen rumsvariabel σ!

1. **OCQ: "Vi kör på känsla".** Vad menar Polchinski med meningarna under (4.1.2)? Läs klart nästa sida innan du svarar.

2. **H=0 alltid?** Henneaux och Teitelboim skriver på s.105 "must the Hamiltonian be zero for a generally covariant system"?

3. **Gaugefixering i klassisk mekanik?** Kan du tänka dig BRST i klassisk mekanik?

4. **Varför finns BRST-symmetri?** Är det inte lite konstigt att en rent bosonisk verkan som den bosoniska strängen (eller Yang-Mills-teori, för den delen) skall kunna ha en fermionisk symmetri?

5. **Kohomologi i matematik.** s.128: "Other examples of nilpotent operators are the exterior derivative in differential geometry and the boundary operator in topology". Vet du vad han pratar om för matematik nu, vad är kohomologi där?

Kapitel 5

1. **Inekvivalenta torusar.** Tänk igenom diskussionen av torusen i kapitel 5.1 ordentligt. Vad innebär en ändring av parametern τ (den s.k. Teichmüllerparametern) egentligen, är det något "fysikaliskt" eller en redundant parameter? Mer precist: innebär inte diff $\times$ Weyl-invarians att man kan ta varje metrik g_{ab} till $g_{ab} = \delta_{ab}$, dvs. utan parameter τ? En relaterad fråga: vad betyder "small mismatch"i första stycken i kap. 5.1?

2. **Banintegraler och spöken.** Missa inte *Note to the reader* på s.150. Poängen är följande. När man generaliserar diskussionen från kap.3.3. till vertexoperatorer och metrikmoduli måste man ta med insertioner av b (en för varje metrikmodulus, så 0 på sfären och 1 på torusen, som vi ser i kap. 7) och c (en för varje fixerad vertexoperator: 3 på sfären och 1 på torusen, som vi ser i kap. 6). Är det uppenbart att man måste ha någon faktor av b och c i funktionalintegralen?

3. **Varför τ-integrera?** Diskussionen i kap. 5.4 är väldigt allmän, men notera i alla fall följande poänger på s.161: integrerade vertexoperatorer producerar randtermer under BRST-variering, medan b-insertioner producerar insertion av T, som ger derivata med avseende på metrikmoduli t^k. Varför är det senare ytterligare en anledning varför man skall integrera över moduli t^k?

4. **Ändra metrik, ändra koordinat.** Diskussionen om Beltrami-differentialer är spännande, men huvudpoängen står i en mening: "we can use this to put the moduli for the metric and for the vertex operators on a more equal footing". Försök formulera det i egna ord.

Kapitel 6 [centralt]

Trädnivå ("tree level") är som du nog vet jargong från kvantfältteori som syftar på Feynmandiagram som ser ut som träd, alltså inga slutna "loopar". Trädnivå-approximationen motsvarar nollte ordningen (semiklassisk) approximation i en Taylorutveckling av en hel amplitud i (typisk energi gånger typisk tid)/Plancks konstant $\hbar$. I strängteori är det g_s^{-2} för slutna strängar och g_s^{-1} för öppna strängar.

1. **Stereografiska metriken på sfären.** (6.1.3). Beror r på z som $r^2 = |z|^2$, dvs är r radien i polära koordinater?

2. **CKV: Konform Killing-vektor**. Det kan vara lätt att tappa bort sig i diskussion om CKV på s. 167, och det är bra att gå tillbaka till ekvation (5.2.8) som Polchinski rekommenderar. Försök formulera diskussionen på s. 167 i egna ord, vad det här har att göra med Riemann-Roch-satsen. Som kuggfråga: vad är det för CKV på torusen? Som sagt, jämför tidigare kapitel.

3. **Vad är ett projektivt plan?**. Projektiva planet RP_2 är inte orienterat (se kap. 3 ovan):
   https://en.wikipedia.org/wiki/Real_projective_plane
   Vad är skillnaden på RP_2 och en "crosscap" (jfr. s. 100 i kap.3 i Polchinski, och fig. 7.2)? Den här Wikipediasidan börjar genast ta upp Möbiusbandet, och jag håller med att det är det lättaste sättet att försöka illustrera RP_2. Så varför tar inte Polchinski upp Möbiusbandet förrän kapitel 7?

4. **Veneziano, igen.** Sektion 6.4. är central. Är den klar? Till exempel, kan du beskriva i ord hur (6.4.5) skiljer sig från uträkningen vi gjorde med oscillatorer och CBH-formeln?

5. **Unitaritet.** Förstår du påståendet i (6.4.13)? I synnerhet, varför måste det finnas en pol?

6. **Trepunktsväxelverkan är lägesoberoende i CFT!** Förstår du diskussionen av Möbiusinvarians, vad säger han egentligen här, uttryckt i en mening? (Har du gått **Symmetrier**: Jämför gärna inlämningsuppgift 1d.)

7. **Exponentiering av matriser.** (Har du gått **Symmetrier**: Jämför gärna CBH-formeln (som mer logiskt kallas "BCH-formeln") i Fuchs & Schweigert sektion 9.8)

8. **Amplituder i kvantfältteori.** Ett stort pedagogiskt problem i sektion 6.5 är att studenter inte känner sig så hemma på kvantfältteoriamplituderna som de här strängamplituderna skall reducera till när strängarna är små. Till exempel, hur hade 3-punkt-S-matriselementet i strängteori (6.5.15) sett ut i Yang-Mills-teori? Är alla termerna med? För att komma igång, jämför med Yang-Mills-3-punkt-vertex. I Peskin & Schroeder är det uppgift 17.4 (uppgiften före är 4-punkts-funktionen!). Schwartz gör det med lite mer moderna metoder än Peskin & Schroeder. Jämför strukturkonstanterna i t.ex. Schwartz (25.33) och Schwartz fantastiska bevis i kap. 27.5.1-2: *Gauge theories based on Lie algebras are the unique interacting theories with massless spin-1 particles.*

Chapter 7 [central]

Feyman diagrams with closed curves (loops) are quantum corrections, i.e. subleading order in $\hbar$. The first subleading order is one loop. In string theory, this is order g_s^0 for both closed and open strings, meaning Euler characteristic $\chi = 2 - 2g = 0$.

1. **Metric moduli.** Can you go back to Chapter 5.1 and equation (5.3.2) and understand what Polchinski meant by metric moduli t^k. What is it for the torus? What's the conformal Killing vector (CKV)?

2. **More on unorientability.** Look up:
   https://en.wikipedia.org/wiki/Klein_bottle
   What they call "*figure 8 immersion*" looks like it avoids self-intersection ... or?

3. **Quantum corrections to Veneziano: correlations of exponentials at one-loop level.** Equation (7.2.4): how can the factor $2\pi/\partial_\nu\vartheta_1$ be determined through (7.2.1) when the factor is independent of w?

4. **Did Leopold Kronecker (1823-1891) know string theory?** *"Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk"*. Try to understand what the claim is in the following two formulas, Kronecker's limit formulas:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker_limit_formula`
The first is an important part of (but not the entire) one-loop partition function for bosonic string theory. The other is for superstring theory. The first limit formula is proven in Nakahara's book (Ch. 14.3 in my printing), if you have it, take a look!

5. **A little on the proof of the limit formulas.** The proof of Kronecker's two limit formulas by the mathematician Carl Siegel[5] that the Wikipedia page above links to is expressed in "Epstein zeta functions". In appendix E.3 (p.46) of my paper `https://arxiv.org/abs/1407.0027` we corrected some small details in Siegel's Tata notes. The details are maybe not so important right now, but can you at least understand the notation in eqs. (226) and (227), so you get a feeling how the Kronecker-Eisenstein series E and the Epstein function ζ are related? For example, how does Siegel define an isotropic vector $\mathbf{w}$ given a quadratic form $\mathbf{Q}$, and what is a *Kugelfunktion*?

6. **Scalars at the one-loop level.** The calculation of scalar correlators on the torus is a central type of calculation, not just in string theory but in theoretical physics more broadly. But what is ω?

7. **Theta functions.** Ch. 7.3. How can the sum representation of the ϑ functions be equivalent with the product representations? Here is an elementary observation that provides some foundation for a proof. Multiply out $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$
(e.g. with `expand(mul(1-x^n,n=1..N))` in Maple, try values of N up to 30). Several terms cancel, if you don't truncate too early. Which powers up to x^{30} survive?

8. **Crazy big gauge groups?** I won't discuss 7.4 in detail since it's bosonic string theory, but we save the details to superstring theory. But try to read the text, especially that about vacuum amplitudes in general and try to understand how $SO(8192)$ appears (which will be $SO(32)$ in superstring theory).

9. **Density of states and entropy.** On p. 213, Polchinski takes the limit for big conformal weight ("high up in the spectrum") and concludes that the central charge completely determines the density of states. This is viewed as pretty surprising since the central charge is a "rough" characteristic whereas the density of states knows about the detailed spectrum and in particular about the entropy. (If you don't know how to get entropy from density of states in the first place, make sure to look it up.) This limit is used for black hole entropy in Ch.14 and again for high temperature in Ch.9.8 (too advanced for us now, but take a look). To see if you understand: how can Polchinski write both $q = e^{-2\pi\ell}$ and $q = e^{-2\pi/\ell}$ in this paragraph?

10. **The so-called "technicality".** Polchinski likes to explicitly separate what he thinks is important at a certain point from what it less important at that stage of your understanding. This is a great pedagogical point in an area that's as broad as string theory. On the other hand it can create problems: he says that what follows from (8.2.21) is a "technicality", which gives the sense of splitting hairs, but then in (10.3.15) will we need exactly this "technicality", and it will be deep and important. To prepare yourself for this: do you understand why only σ^1 occurs in the right-hand-side in (8.2.21)? Can you even calculate it from (8.2.16a) and the standard commutator (2.7.5a)?

[5] not to be confused with the string theories Warren Siegel!

Kapitel 8 [centralt, utom 8.5]

1. **Kaluza-Klein-reduktion på cirkel.** Försök förstå hur Ricciskalären (8.1.8) följer från metriken.

2. **Jacobi kontra Fourier**. Kan du förstå (8.2.10) som en transformation av en ϑ-funktion?

3. **Orbifalder.** Det är ett helt kapitel om det (kap. 16), så tjuvtitta gärna där. En intressant fråga är, vad är Eulerkarakteristiken χ för t.ex. en T^4/Z_N, t.ex. $N = 3$ som Polchinski ritar?

4. **Tvistade strängar.** Försök göra en skiss av diskussionen på sidan 259, ekvation (8.5.13).

5. **Hur flyttar man på ett D-bran?** (8.6.15) är viktig. Vad betyder det egentligen att byta tecken på X_R i T-dualitet — varför kan man göra det?

6. **D-bran och LIGO.** Skissa ett strängdiagram (på trädnivå) där en gravitationsvåg träffar ett D-bran och det oscillerar, som han beskriver på s.269.

7. **D-bran och gravitoner.** Skissa Feynmangrafen med gravitonutbyte i ekvation (8.7.25).

Appendix A

1. **Banintegraler kontra operatorer**. s.332: I strängteori har man inte bara trajektorier utan hela världsytor, så man kan *"cut the surface open along many different closed curves; different choices give different Hilbert space representations"*. Försök förstå i stora drag hur det relaterar till kommentaren om världsytedualitet på s.287. (Diskussionen i kap.9 är väldigt allmän, men man ser exempel på det redan i Venezianoamplituden, som Veneziano konstruerade genom att tvinga den att uppfylla världsytedualiteten.)

2. **Är vanlig kvantmekanik divergent?**. Svaret är ja, fast som vanligt är det inget problem. s.340: Kommentaren är instruktiv! Men förstår du vad han menar?

Chapter 10 [central, but challenging]

1. **Periodicity (or not) for fermions** Go back to fig. 2.3 and remind yourself of the map $z = e^{-iw}$ where z is the "sphere coordinate" and w the "cylinder coordinate" $w = \sigma^1 + i\sigma^2$. (Warning: compare eq. (2.1.12) and (2.6.4)!). What is ν for periodic fermions? For antiperiodic? What are they called, and why is antiperiodic allowed at all? Also, when Polchinski writes "cylinder", does that mean loop level here?

2. **NS sums**. What does it mean that the sum is over "integers", if $\nu = 1/2$?

3. **Conformal transformation of fermions**. Do you understand why the square root is needed in the transformation?

4. **Branching**. What does Polchinski mean by saying there is a *branch cut* for R fermions? Why could that be a problem?

5. **Doubling trick.** The discussion of open strings around (..) is called the (*doubling trick*). What is it that is being "doubled"?

6. **Chirality.** The "string chirality operator" $e^{\pi i F} = (-1)^F$ is a generalization of the gamma matrix γ^5 to the entire string spectrum. But how do you see that it's actually chirality; by Ch.10 the massless vector contains a ψ oscillator. In other words, is there a connection between "fermion on the worldsheet" and "fermion in spacetime"? (Hint: he also introduced **F** in boldface, the spacetime fermion number.)

7. **Bosonization.** It takes a little bit of effort to understand what $\psi \sim e^{iH}$ really means: how can exponentiating a boson ever give a fermion? First, it might be useful to state explicitly that this actually *is* surprising and deep — it wasn't obvious to anyone before it was understood. One concrete question: when we bosonize in the R sector we have halves in the exponent, $\Theta \sim e^{\pm\frac{1}{2}iH}$. This feels a little more "fermionic" than with integers. Why is there no half in $\psi \sim e^{iH}$, and how do we see that it's a fermion? Should we start worrying about e^{ipX} in our earlier vertex operators, isn't that always bosonic?

8. **Spectral flow.** I'm not sure I understand this myself! If $\nu = +1/2$ like in the NS sector it looks like the exponent is zero, but I would have expected it to be consistent with $\psi \sim e^{iH}$.

9. **Spin-statistics theorem.** The connection between spin (half-odd-integer vs. integer) and statistics (fermion/boson) is given by a theorem that was proven by Pauli a long time ago. What does Polchinski mean by saying that ψ^μ and $e^{-\phi}$ both seem "problematic" from this point of view? What is the resolution in string theory?[6]

Kapitel 12 [centralt, men utmanande]

1. **Verkan.** han ger nästan inga detaljer, så läs igenom men förvänta dig inte att förstå. En intressant fråga är de olika definitionerna av RR-fälten F (den ena med tilde, $\tilde{F}$). Vad skiljer definitionerna?

2. **Superfält.** Notera kommentarer om att någon verkan är "unik" tack vare supersymmetri, men har ger ingen kommentar om hur man skulle kunna bevisa det. Första steget till bevis vore att skriva ut fermionerna! Men om man hade skrivit ut dem ser det väldigt komplicerat ut. Så hur gör man supersymmetri manifest, som man gör t.ex. Lorentzinvarians manifest? Svar: med *superfält*, förstås. De introducerades av Salam och Strathdee redan 1974.[7] Det här går att förstå och är användbart, men inte nödvändigt för vår kurs. En snygg aspekt är att man får gravitonvertexoperatorn $\mathcal{V}^0$ i den s.k. 0-bilden ganska naturligt (se mina stränganteckningar). Vad kallar Polchinski extratermerna i $\mathcal{V}^0$ utöver ∂X?

3. **Superspöken.** En annan är att man får nya spöken väldigt billigt: man får $\beta\gamma$-teorin från supersymmetrisering av bc-teorin. Hur hade du kunnat gissa att det skulle kunna vara så från diskussionen av bc och $\beta\gamma$ i kapitel 2?

4. **Anomalier**: P&S har tre varianter av uträkningen i abelsk gaugeteori (QED), sedan en för ickeabelsk gaugeteori. Schwarz gör detsamma i 30.1-30.3, och 30.4 diskuterar han Standardmodellen. Hur var det, är standardmodellen anomalifri? Om man tar bort toppkvarken?

5. **Amplituder**: det står inte så mycket precis hur man gör, för han syftar mycket på boken av Green-Schwarz-Witten, som har en uppdaterad version i Becker-Becker-Schwarz kap 5.4. Vi skall göra några exempel. Ett stort pedagogiskt problem är att studenter inte känner så hemma på kvantfältteoriamplituderna som de här skall reducera till, se kap.6 ovan, minns du om det var någon term av ordning α' i 3-punkts-amplituden för gaugebosoner i bosonisk strängteori?

[6] Polchinski calls this "rather technical", but it's pretty important also conceptually in Ch.12; compare his earlier comment about "technicality" in Ch. 8! It's nothing strange that something that seems a technicality from a basic perspective can be central in a more advanced perspective. It's easy to think of analogies in standard quantum field theory, e.g. do you know what BPHZ renormalization is? It seems technical from a basic point of view, but it's crucial that it works. In Peskin and Schroeder, even the derivation of the photon propagator is pushed to a later chapter.

[7] Vill du verkligen veta det finns det massor av böcker om superfält i $D = 4$. Wess & Bagger är standardverket, men inte så lättläst: jag gillar de tre böckerna Terning och Dine och Baer-Tata (den sista är mest fenomenologisk). Men det lustiga är att supersymmetri inte bara uppfanns i strängteori, det är enklast i $D = 2$. Så om du skulle börja här i Polchinski kanske det inte är någon dålig idé — jag har inte provat, själv började jag lära mig om superfält genom att räkna igenom massor av uppgifter i Wess & Bagger. (Du kan gärna få mina lösningar om du vill.) Men nuförtiden finns det nog mer effektiva sätt, som t.ex. Terning. Eller Siegels gratisbok "Fields" kanske går att lära sig ur. De här böckerna gör inte så mycket supergravitation. För det är Freedman & van Proyens bok bra, men de använder inte superfält alls!

Försök så gott du kan att skumma igenom det här kapitlet.

Kapitel 13

1. **Dualitet finns.** Dualitet är numera *experimentellt väletablerat* i materialfysik i i låg dimension, läs gärna t.ex.
   http://physics.aps.org/articles/v9/72
   Är det samma McGreevy som dyker upp i strängteori, t.ex. i mina introanteckningar?

2. **D-bran-laddning.** Jämför diskussionen om D-bran-laddningen med den i kapitel 8 för bosonisk strängteori, som är mer detaljerad och förståelig. Varför hänger laddningen och spänningen ihop med en Φ-beroende faktor?

3. **Uppvärmning för svarta hål.** Det är viktigt med diskussionen om #ND=4 för svartahålsentropin i kap.14. Som jag bara kommer att skissa. Var kom verkan (13.5.21) ifrån?

Kapitel 14

1. **Svartahålsentropi.** Hur hänger Polchinskis uttryck $S = 2\pi A$ samman med Hawkings $S = A/4$?

Appendix B

Kapitlet är skrivet som en appendix så det är inte riktigt tänkt att man skall "lära sig" från det, utan har du någon koll på spinorer och gammamatriser γ^μ i $D = 4$ så är tanken att Γ^μ är en naturlig generalisering till godtyckligt D.

(Har du läst **Symmetrier**, så läs kap. 20.9 i Fuchs & Schweigert, där den centrala supersymmetriekvationen $\{Q, Q\} = P$ förekommer.)

1. **Stegoperatorer.** Men, är generaliseringen till godtyckligt D så värst naturlig? I synnerhet, han skriver gammamatriserna med stegoperatorer Γ^+, betyder det att det inte går att prata om klassisk fysik här?

2. **Reducibla spinorrepresentationer.** Bekanta dig med tabellen över villkor (Weyl, Majorana) man kan sätta på spinorer i olika dimensioner, och hur stora gammamatriserna är. Gissa: är den här periodiciteten något allmänt?

3. **Sönderläggning.** Det är lite representationsteori också, om sönderläggning (*decomposition*). Förstår du exemplen? (Försök gärna relatera det till **Symmetrier**-kursen om du läst den, t.ex. inlämningsuppgift 5b om $SO(5)$.)

Kompendium

1. (Har du läst **Symmetrier**, så läs om Baker Lemma 3.25, som är relevant i orbifalder.)