

Vad är kvantfältteori?

Marcus Berg, 2022-12-08

1 Introduktion

Kvantfältteori var ursprungligen kombinationen av kvantmekanik och speciell relativitetsteori. På senare tid har det också använts för system som är kvantfysiska men inte relativistiska. I de fallen är det *sättet som relativitetsteori byggs in i kvantfysik* (via analytisk mekanik) som generaliseras till andra ramverk. Alltså metoden mer allmänt, inte detaljerna.

Några av våra mest grundläggande frågor om naturen, som varför himlen är blå, hur lampor lyser, eller varför det finns spektrallinjer, är svåra att ens formulera exakt utan kvantfältteori. Det är för att de handlar om växelverkan mellan fotoner och elektroner. Fotoner är som bekant relativistiska, och både fotoner och elektroner är kvantmekaniska. Så då kommer man egentligen inte så långt utan kombinationen av relativitetsteori och kvantmekanik. Det gäller ännu mer för partikelfysik (gluoner, Higgs-partikeln och sådant), som vi också skall prata om här.

Vad betyder det egentligen att "inte vara relativistisk" — gäller inte relativitetsteori alltid? Jo, men det är inte alltid relevant. Att ignorera ljushastigheten som översta gräns, att ta $c \rightarrow \infty$, betyder att vi använder enheter där hastigheter av storleksordningen 1 är mycket mindre än ljushastigheten c . Som m/s! Då är *boost-invariants*, den del av Lorentz-transformationerna vi jobbar för att implementera i speciell relativitetsteori, helt enkelt irrelevant.¹

Allmän relativitetsteori då? Det får vi ta en annan gång, men det är i princip liknande situation: ta $M_P \rightarrow \infty$, dvs. betrakta bara massor mycket mindre än Planck-massan $M_P = 22$ mikrogram.²

Vill du ha något att läsa? Feynmans bok "QED" [1] är jättebra. Men den är förlegad att ha som enda källa, och dessutom mest ord. Jag föreslår McMahons "*Quantum Field Theory Demystified*" [2] som referensmaterial. Den är inte alls så bra som Feynman. Men den är relativt kort, ca 300 sidor, och McMahon försöker förklara saker som annars lämnas till förkunskaper.

För att vara tydlig, jag skulle inte vilja ha McMahon som seriös kursbok. För mycket saknas, och han verkar stundtals inte själv förstå det som skall "demystifieras". Det är en kompromiss. Min kursbok blir nog Zee [3], på 600 sidor. Ändå kortfattad jämfört med standard-böcker [4,5], på nästan 900 sidor var, för att inte tala om Weinbergs monumentala verk [6] i tre volymer.

2 Förkunskaper

2.1 Klassisk partikelmekanik

Newton formulerade mekanik med kraft $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$. För lutande plan får vi komponentuppdelade krafter. Till exempel i horisontal/vertikal-led, eller så kan vi komponentuppdelade utefter/vinkelrätt mot planet. Att de alternativen är fria val i vår beskrivning av en och samma mekaniska situation känns intuitivt. Men vad är det med Newtons lagar som garanterar att olika komponentuppdelningar ger samma dynamik?

Det är att **naturalagarna i sig skall vara invarianta** (dvs. samma) om man

- roterar med vinklar θ, ϕ
- flyttar origo med en vektor \vec{r}
- rör sig med konstant hastighet \vec{v} .

Idag säger vi att naturalagarna i sig har "invariants under **Galileo-transformationer**".

(Vad "naturalagarna i sig" betyder mer exakt är precis det vi skall arbeta vidare med, men kort uttryckt: en kraft \vec{F} har olika komponenter för olika uppdelningar, men $\vec{F} = m\vec{a}$ gäller ändå.)

¹Om du läser om den här introduktionen senare: ett konkret exempel är "Schrödinger-fältet", gränsen $c \rightarrow \infty$ av Klein-Gordon-fältet.

²Mer allmänt, se t.ex. en [debatt-artikel](#) om det.

I speciell relativitetsteori motsvarar punkt "c" ovan att naturlagarna skall vara invarianta under Lorentz-transformationer, t.ex. translation med konstant hastighet i x -riktningen ändrar tid t och läge x till t' och x' :

$$ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x), \quad x' = \gamma(x - vt) \quad \text{där } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.1)$$

Själva värdena är uppenbarligen inte invarianta: $t' \neq t, x' \neq x$, ena koordinatsystemet rör sig relativt det andra. Men en viktig egenskap hos ekv. (2.1) är att ljusets hastighet c är samma i alla koordinatsystem, som jag bevisar i kompendiet [Modern fysik 1](#), s. 1-8. Tar vi med alla fyra koordinaterna $x^\mu = (ct, x, y, z)$ för $\mu = 0, 1, 2, 3$ (kom ihåg att μ inte är en potens, bara ett index uppe) kan vi skriva Lorentz-transformationen som en 4×4 -matristransformation:

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (\text{upprepat index, här } \nu, \text{ står för summa } \sum_{\nu=0}^3), \quad (2.2)$$

till exempel så här skrivs ekv. (2.1), alltså rörelse med konstant hastighet enbart i x -riktningen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{x'^\mu} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda^\mu{}_\nu} \underbrace{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{x^\nu} \quad (2.3)$$

(Multipluera ut två första raderna och kolla att du får ekv. (2.1).)

Definiera nu diagonalmatrisen $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, som kallas *metriken*, och definiera med den en skalärprodukt $x \cdot x = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = -(x^0)^2 + \vec{x}^2$, med ett fint ord "Lorentz-normkvadrat av x^μ ", och skriv $x^0 = ct, \vec{x} = (x, y, z)$. Lorentz-normkvadraten är invariant (samma) om vi ersätter spaltvektorn x^μ med $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. Alltså: $x' \cdot x' = x \cdot x$, som du får testa i en övning nedan.

Det här var punkt "c" ovan. Tillsammans med punkt "a" och "b" får vi Lorentz-normkvadratens invarians under [Poincaré-transformationer](#). Det är symmetrin hos speciell relativitetsteori. Flera Poincaré-transformationer efter varandra är fortfarande Poincaré-transformationer, och de bildar en *matematisk grupp* som skrivs " $\text{SO}(1, 3) \times \mathbb{R}^{1,3}$ ". Jag skriver nedan vad SO står för. Produkten \times kallas *semidirekt produkt*, och $\mathbb{R}^{1,3}$ betyder translationer av origo i rumtiden (1 tid + 3 rum). Matematik är inte fokus här, men att införa kortfattade matematiska namn som $\text{SO}(1, 3) \times \mathbb{R}^{1,3}$ kan hjälpa lite att hålla saker isär när vi stöter på andra sorters symmetrier nedan.

Det framkom efter Newton att det ofta är mer praktiskt att arbeta med energi istället för kraft. Energi är som bekant inte vektor utan skalär:

$$E_{\text{tot}} = \text{rörelseenergi} + \text{lägesenergi} = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + mgh. \quad (2.4)$$

Så långt inget nytt. Men hängde du med ovan borde du få en liten olustig känsla från totala energin ekv. (2.4): den verkar inte respektera varken Poincarés eller Galileos invarians! Om vi åker bredvid ett objekt med samma hastighet v som objektet så verkar rörelseenergin vara noll, $T' = 0$. Om vi mäter gravitationell lägesenergi från höjden h där partikel befinner sig, dvs. flyttar origo, så verkar lägesenergin vara noll, $V' = 0$. Kan vi verkligen tillskriva någon fysikalisk mening till en storhet E_{tot} som går att transformera till noll, $E'_{\text{tot}} = 0$? Svaret är förstås ja, annars skulle vi inte använda energi som begrepp. Men det är värt att reflektera över. Jämför [en av mina videor](#) om observatörberoende rörelseenergi i newtonsk mekanik, om du vill.

Total energi är alltså inte invariant under Lorentz-transformationer. Invariant är däremot en mindre bekant kombination: *differensen* av (energi)² och (rörelsemängd)², analogt med "Lorentz-normkvadrat" ovan:

$$"p^2" = p_\mu p^\mu = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -p_0^2 + \vec{p}^2 = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 \quad (2.5)$$

där metriken η är diagonalmatrisen $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ och $p^0 = E/c$ där E är totala energin.

Övning 1: stoppa in $p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu}$ från ekv. (2.3) i (2.5) och visa att $p'_{\mu} p'^{\mu} = p_{\mu} p^{\mu}$, dvs. invariant.

Tips: i specialfallet $p'_0 = \gamma(\frac{E}{c} - \frac{v}{c} p_x)$, $p'_x = \gamma(\frac{E}{c}(-\frac{v}{c}) + p_x)$, bilda $p'_{\mu} p'^{\mu} = -(p'_0)^2 + (p'_x)^2$.
Nu är det lite "tur" att Lagrange redan år 1788 införde kombinationen

$$L = T - V = \text{rörelseenergi} - \text{lägesenergi} \quad (2.6)$$

långt innan Lorentz. Den här kombinationen passar bra för att bilda Lorentz-invarianta storheter: rörelseenergi T har något att göra med tid ($v = dx/dt = \dot{x}$) medan³ lägesenergi $V(\mathbf{x})$ har något att göra med rum, och i L har T och V olika tecken som i ekv. (2.5), inte samma tecken som i E_{tot} . (Lagrange-funktionen L är i motsats till totala energin E_{tot} däremot inte bevarad i tiden, testa gärna för harmonisk oscillator.)

Men först ickerelativistiskt, för att få lite känsla för L : betrakta en partikel som rör sig bara i höjddled z i tyngdkraftfältet. Vi har Lagrange-funktionen

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz \quad \left(\dot{z} = \frac{dz}{dt} \right). \quad (2.7)$$

Poängen med Lagrange-funktionen L är att den packar ihop information. Rörelseekvationen för $z(t)$ går att få från L via *Euler-Lagrange-ekvationerna*. I en dimension z är Euler-Lagrange-ekvationen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0. \quad (2.8)$$

Ta ekv. (2.8) som given egenskap hos L . I partikelexemplet har vi $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{z}^2$, så

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left(\frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz \right) = m \dot{z} \quad (2.9)$$

och tidsderivatan av det är $m \ddot{z} = ma$, där a är accelerationen i z -led. Andra termen i ekv. (2.8) är

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz \right) = -mg \quad (2.10)$$

så (2.8) blir $ma + mg = 0$. Med $F = -mg$ är Euler-Lagrange-ekvationen alltså $F = ma$.

Övning 2: Istället för gravitationell energi $V = mgz$, ta harmonisk oscillator $V = \frac{1}{2} kx^2$ i ekv. (2.8).

Det verkar än så länge inte vara någon förbättring att byta ut $F = ma$ mot Lagrange-funktionen L . Men tanken är att det t.ex. i tre dimensioner är tre ekvationer $\vec{F} = m\vec{a}$ och fortfarande bara en Lagrange-funktion L . Eftersom L bara är en funktion borde den automatiskt vara invariant om den skall vara meningsfull överhuvudtaget, medan komponenterna av $\vec{F} = m\vec{a}$ transformerar in i varandra under t.ex. rotation.

2.2 Klassisk fältteori

Nu vill vi inte bara ha en partikel i en punkt, utan ett klassiskt fält $\varphi(x^{\mu}) = \varphi(ct, x, y, z)$ som beror på alla fyra rumtids-variablerna. En partikel som rör sig åt höger i x -led med hastighet v beskrivs av det singulära fältet $\varphi(x^{\mu}) = \delta(x - vt)$, där δ är Diracs deltafunktion, som är koncentrerad i en punkt. Tänk dig gärna mer allmänt en liten krusning ("ett gupp") i fältet, där extremfallet är δ .

För att gå från partikelmekanik till fältmekanik börjar vi med att skriva Lagrange-funktionen L (enhet energi) som rumsintegralen av en Lagrange-täthet \mathcal{L} (enhet: energi per volym):

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad (2.11)$$

³Någon undrar nog varför jag skriver en stor ful prick \dot{x} och inte en liten fin prick \dot{x} , men vi som börjar få lite dålig syn har svårt att se lilla prick, och att den syns är viktigare än att den är fin. Den behövs heller inte senare.

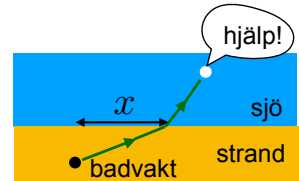
och låt tätheten \mathcal{L} bero på fältet: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi(x^\mu))$. Generalisering av Euler-Lagrange-ekvationen (2.8) till fält $\varphi(x^\mu)$ som beror på alla fyra rumtids-variablerna $x^\mu = (ct, x, y, z)$ får vi genom att ersätta tidsderivata med alla fyra derivatorna ∂_μ för $\mu = 0, 1, 2, 3$:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad \left(\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right). \quad (2.12)$$

Kronan på verket är att integrera \mathcal{L} även med avseende på tid. Resultatet kallas verkan S (action):

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (2.13)$$

På Lagranges tid var ett mål att förstå Fermats princip: ljus tar den *snabbaste* vägen genom material med olika brytningsindex, inte den kortaste. Det mystiska är att det verkar *teleologiskt* (finns ett "syfte"). Badvakten kanske kan snabbräkna ut x , hur långt det är optimalt att springa i sidled utefter stranden, redan i startögonblicket. Men hur kan en foton som passerar in i glas fatta beslut om x innan den påbörjat färden?



Det var diskussion fram och tillbaka som kulminerade i Hamiltons princip 1834. Stråloptik förklaras därigenom från vågoptik: strålvägen är vågoptikens interferensmaximum. Feynman beskriver det här färgstarkt i kapitel II-19, inklusive hur hans gymnasielärare förklarade det för honom.

Övning 3: Visa att vägen med $\Delta S = 0$ löser Euler-Lagrange-ekvationerna (2.12). (s.30-31 i [2]).

2.3 Matematik: grupp och grupp-representation

Idag är Galileo-invarians (invarians under rotation och translation) formaliserat som invarians under Galileo-gruppen. Första exemplet är rotationer. Rotationer i två dimensioner kommuterar (ordningsföljden spelar ingen roll). Men i tre dimensioner är **rotationsmatriser** i allmänhet icke-kommutativa. Den kanske mest intuitiva representationen är vektor-representationen:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ t.ex. } R_z(90^\circ) \hat{x} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{y} \quad (2.14)$$

dvs. en 90° -rotation runt z -axeln av basvektorn \hat{x} är y -basvektorn \hat{y} . Matematiker kallar rotationsgruppen $SO(3)$, för att matriserna är 3×3 , O står för ortogonal ($R^T = R^{-1}$) och S för speciell, vilket betyder determinant 1. (Det går fort att testa att matrisen $R_z(\theta)$ ovan uppfyller de kraven.)

En lika viktig men lite mindre intuitiv representation är spinor-representationen, som kanske är bekant t.ex. från Susskinds bok [10]:

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \\ \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix}, \text{ t.ex. } R_y(180^\circ) \hat{u} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{d} \quad (2.15)$$

dvs. en 180° -rotation runt y -axeln av bas-spinorn upp \hat{u} i z -led är bas-spinorn ned, \hat{d} .

En tredje representation av rotation är den adjungerade (*adjoint*) med en matris A som exponentierar till $R(\theta)$:

$$R(\theta) = e^{i\theta A} = I + i\theta A + \frac{1}{2}(i\theta A)^2 + \dots \quad (2.16)$$

där exponentialen av en matris som synes definieras av sin taylorutveckling. Om A är en antisymmetrisk matris ($A^T = -A$), så är R en *ortogonal* matris ($R^T = R^{-1}$), alltså $R^T R = I$, identitetsmatrisen:

$$R^T R = (e^{i\theta A})^T e^{i\theta A} = e^{i\theta A^T} e^{i\theta A} = e^{-i\theta A} e^{i\theta A} = e^0 = I. \quad (2.17)$$

Övning 4: För exemplet $A = L_z$ från [Wikipedia-sidan](#), räkna ut exponentieringen $R = e^{\theta L_z}$.

Mer allmänt säger man att R är i gruppen $SO(3)$ och A är i algebran $so(3)$, med små bokstäver. Det kallas Lie-algebra efter norske matematikern Sophus Lie. Schwartz [4] visar i kap 27.5 att kvantfält-teorier med Lie-algebra är de enda möjliga teorierna med växelverkande masslösa spinn-1-partiklar, som fotonen och gluonen. (W/Z-partiklarna är spinn-1, men massiva.)

3 Kvantmekanik

Heisenberg upptäckte kvantmekanik i juni 1925 på ön Helgoland i Nordsjön. "He hurriedly calculated the energies of the harmonic oscillator and the rigid rotator and obtained satisfactory agreement with his recollection of known observations in time to watch the morning sun dawn over the eastern sea." [21]. Vad är grundprincipen i kvantmekanik som Heisenberg formulerade då, motsvarande Newtons lagar i klassisk mekanik?



Frågan diskuteras t.ex. på Stanford-encyklopedin [22]. Kort svar: principen Heisenberg kom på i juni 1925 är att ersätta mätbara storheter a och b med matriser $a \rightarrow \mathbf{A}$ och $b \rightarrow \mathbf{B}$, som inte kommuterar: $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} \neq 0$. För $x \rightarrow \mathbf{X}$ och $p \rightarrow \mathbf{P}$ sätter man⁴ $[\mathbf{X}, \mathbf{P}] = i\hbar$ som ger Heisenbergs obestämdhetsrelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$, vilket han förklarade 1927. (Beviset varför $[\mathbf{X}, \mathbf{P}] = i\hbar$ implicerar $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$ står i Susskinds bok [10], kap.5.)

Det låter abstrakt till en början. Den mätbara storheten här är övergångs-sannolikhet mellan två tillstånd, inte läget x för elektronen. I ett exempel med 3×3 -matriser,

$$(\mathbf{AB})_{12} = \sum_{k=1}^3 A_{1k}B_{k2} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \quad (3.1)$$

så "för att komma från 1 till 2 måste vi gå på alla 3 sätt emellan". Weinberg skrev 1992 [7] att Heisenbergs argument från 1925 var "magi", men 2015 lyckades Weinberg ändå gå igenom det förstaeligt [9].

Betrakta elektronen i atomen, ett bundet tillstånd. En valenselektron i grundämnen H och He har kvanttal $(n, \ell, m_\ell, m_s) = (1, 0, 0, \pm \frac{1}{2})$. För Li och Be har en valenselektron kvanttalen $(2, 0, 0, \pm \frac{1}{2})$. Sedan har vi B, C, N, O, F och Ne med $(2, 1, 0, \pm \frac{1}{2})$, $(2, 1, -1, \pm \frac{1}{2})$, $(2, 1, 1, \pm \frac{1}{2})$.

Det nya i B, C, N, O, F och Ne jämfört med H, He, Li och Be är att valenselektronen i grundtillståndet har rotationsenergi: $\ell = 1$ (rörelsemängdsmoment). Då kan z -komponenten m_ℓ vara $-1, 0$ eller $+1$. Vi får ange både ℓ, m_ℓ , heltal som anger värdet på storheterna $|\vec{L}|$ och L_z , för att $so(3)$ -matriserna $|\vec{L}|$ och L_z som ersätter $|\vec{L}|$ och L_z i kvantfysik kommuterar, trots att t.ex. $[\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_z] \neq 0$.

Övning 5: med $so(3)$ -matriserna $\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y, \mathbf{L}_z$ i förra övningen, visa att $[\mathbf{L}_x^2 + \mathbf{L}_y^2 + \mathbf{L}_z^2, \mathbf{L}_z] = 0$.

Spektrallinjerna Heisenberg tittade på var övergångar från och till exciterat tillstånd via absorption eller emission av en foton. Så valenselektronen är inte bara i grundtillståndet. Men vi kan få en känsla från grundtillståndet i t.ex. kol C att "menyn" av exciterade tillstånd även i enklare atomer som väte H borde innehålla $\ell = 1$. (Det går inte att få reda detaljer om H på det sättet, eftersom varje grundämne har sin egen elektronkonfiguration, men det går att få en känsla för H:s exciterade tillstånd från C:s grundtillstånd.) Notera också för senare bruk att det vi gör här är att karaktärisera elektronens tillstånd "före" och "efter" ett visst nedåt-kvanthopp, men inte hur den växelverkar med fotonen, den syns inte alls.

Nu till läge x och rörelsemängd p , och harmonisk oscillator, en enklare version av det Heisenberg skrev om 1925. En massa m på en fjäder med fjäderkonstant k beskrivs icke-relativistiskt av totala

⁴Heisenberg skrev inte exakt så själv i första artikeln, men ganska likt.

energin⁵

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad (3.2)$$

där jag introducerade vinkelfrekvensen $\omega = \sqrt{k/m}$. I kvantfysik betraktas E_{tot} som egenvärdet hos energi-operatorn \mathbf{H} , där vi ersätter $p \rightarrow \mathbf{P}$, $x \rightarrow \mathbf{X}$:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{P}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\mathbf{X}^2 \quad (3.3)$$

där \mathbf{H} står för Hamilton, och jag satte massan $m = 1$ för att slippa skriva lite. (Det är samma Hamilton som ovan. Man gör inte så stora utsvävningar kring hans mekanik här för att energi känns bekant, men egentligen är Hamiltons mekanik lika annorlunda Newtons som Lagranges mekanik, även om alla tre är ekvivalenta.)

Hamilton-operatorn är kvadratisk i \mathbf{X} och \mathbf{P} . För andragradsekvationer som $x^2 + 1 = 0$ går det att hitta lösningar genom faktorisering: $(x - i)(x + i) = 0$ visar direkt vad lösningarna är. På liknande sätt går nu \mathbf{H} att faktorisera, som följer ([10] kap.10.6).

Definiera steg-operatorerna (*ladder operators*, eller *raising/lowering operators*)

$$\mathbf{a}^- = \frac{i}{\sqrt{2\omega\hbar}}(\mathbf{P} - i\omega\mathbf{X}), \quad \mathbf{a}^+ = -\frac{i}{\sqrt{2\omega\hbar}}(\mathbf{P} + i\omega\mathbf{X}). \quad (3.4)$$

Övning 6: Visa från Heisenbergs $[\mathbf{X}, \mathbf{P}] = i\hbar$ att $[\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+] = 1$.

Uttryckta i steg-operatorerna blir energi-operatorn

$$\mathbf{H} = \hbar\omega(\mathbf{a}^+\mathbf{a}^- + \frac{1}{2}\mathbf{I}) = \hbar\omega(\mathbf{N} + \frac{1}{2}\mathbf{I}) \quad (3.5)$$

där \mathbf{I} är identitetsoperatoren och jag definierade *antals-operatorn* (*number operator*)

$$\mathbf{N} = \mathbf{a}^+\mathbf{a}^-. \quad (3.6)$$

Notera att $\hbar\omega = h/(2\pi) \cdot 2\pi f = hf$, Einsteins formel som kopplar energi och frekvens.

Dimensionsanalys av ekv. (3.5) visar att *antals-operatorn* \mathbf{N} är något dimensionslöst mått på hur mycket energi ett tillstånd har. Istället för att prata om läge kan vi beteckna tillstånd hos den kvantfysiska harmoniska oscillatorn med egenvärde för \mathbf{N} , kalla det n , dvs.

$$\mathbf{N}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (3.7)$$

Nu gäller $[\mathbf{N}, \mathbf{a}^+] = \mathbf{a}^+\mathbf{a}^-\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^+\mathbf{a}^+\mathbf{a}^- = \mathbf{a}^+$, eftersom $[\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+] = 1$. Därför har vi

$$\mathbf{N}\mathbf{a}^+|n\rangle = (\mathbf{a}^+\mathbf{N} + [\mathbf{N}, \mathbf{a}^+])|n\rangle = (\mathbf{a}^+\mathbf{N} + \mathbf{a}^+)|n\rangle = (n+1)\mathbf{a}^+|n\rangle. \quad (3.8)$$

Så tydligen har $\mathbf{a}^+|n\rangle$ egenvärde av \mathbf{N} som är $n+1$. Det vill säga, $\mathbf{a}^+|n\rangle$ har "en fler" bit energi än $|n\rangle$. En sådan heltals-enhet kallas *energi-kvantum*. Vi kan kalla verkan med \mathbf{a}^+ "skapelse" (*creation*) av ett energi-kvantum. Eller mindre dramatiskt, bara "steg upp" i energi.

På samma sätt har $\mathbf{a}^-|n\rangle$ egenvärde av \mathbf{N} som är $n-1$. Vi kan kalla verkan med \mathbf{a}^- "förstörelse" (*annihilation*) av ett energi-kvantum, eller "steg ned" i energi.

Men i motsats till att gå upp i energi verkar det inte rimligt att gå ned i energi hur långt som helst: ett stabilt system har ett *grundtillstånd* med lägsta energi. Vi ser i uttrycket för \mathbf{H} i ekv. (3.5) att om det finns ett tillstånd $|n\rangle$ sådant att $\mathbf{a}^-|n\rangle = 0$ så har det lägsta energin. Vi kan kalla det $|0\rangle$, men ofta är ett bättre namn $|\text{vac}\rangle$ för vakuum. (En anledning är att $|0\rangle$ ser ut som att det har "noll energi", men enligt ekv. (3.5) har det energi $\frac{1}{2}\hbar\omega$, den s.k. vakuum-energi. Å andra sidan gäller energi-förskjutningen med $\frac{1}{2}\hbar\omega$ för alla tillstånd, inte bara $|0\rangle$.) Jag behåller namnet $|0\rangle$ på grundtillståndet tills vidare.

Du som kan lite kvantfysik undrar nog, var hände med Schrödingers vågfunktion ψ ? I kvantfältteori arbetar vi mest i Heisenberg-bilden av kvantfysik. Men det är viktigt att koppla de två synsätten. Det var Borns doktorand Jordan som insåg att $[\mathbf{X}, \mathbf{P}] = i\hbar$ implicerar $[\mathbf{P}, \mathbf{X}^n] = -in\mathbf{X}^{n-1}$, vilket ser ut som att \mathbf{P} verkar på \mathbf{X} som en *derivata*: plockar ned potensen n framför, sänker potensen med 1. (Prova gärna att visa det, men jag tar inte med som "övning", kanske borde jag?)

⁵I en supradledande kvantbit i kvantdatorerna på Chalmers motsvarar de här mekanik-parametrarna specifika elektronik-parametrar: massan = kapacitansen C , och vinkelfrekvensen $\omega = 1/\sqrt{LC}$, där L är induktansen. [20]

Så med $\mathbf{P}\phi = -i\hbar\partial_x\phi$ för tidsberoende vågfunktionen $\phi(x)$, och $\mathbf{X}\phi = x\phi$, gör följande. (Som första försök, sätt gärna $\omega = 1$, och även $\hbar = 1$, om du känner dig trygg med det.)

Övning 7: visa att $\mathbf{a}^-\phi_0 = 0$ ger $\phi_0(x) = e^{-\omega x^2/(2\hbar)}$, och att $\phi_1 = \mathbf{a}^+\phi_0$, $\phi_2 = \mathbf{a}^+\phi_1$ löser Schr.-ekv.

4 Klassisk (före-quant-)elektrodynamik

För att komma till kvant-elektrodynamik i nästa sektion vore det bra att grunda idéerna i *klassisk* elektrodynamik (dvs. före kvantfysik).

Rotationer och translationer (förflyttningar) är intuitiva begrepp. När vi pratar om fält skulle vi kunna rotera och förflytta fältet i varje punkt. Faktum är att Lorentz-transformationerna (2.1) ursprungligen härleddes som invarians-egenskaper hos Maxwells ekvationer för det elektromagnetiska fältet. Einsteins artikel 1905 om speciell relativitetsteori börjar med en elektron med hastighet \vec{v} som böjs av i ett magnetiskt fält \vec{B} på grund av Lorentz-kraften $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, med $\vec{E} = \vec{0}$. Einstein frågar sig hur elektronen, som är i vila i sitt eget koordinatsystem ($\vec{v}' = \vec{0}$) kan känna av någon kraft \vec{F} alls. (Vad är svaret?)

Einstein generaliserade sedan runt 1915 Lorentz-transformationerna till allmänna koordinattransformationer, som kan variera från punkt till punkt. Har du läst allmän relativitetsteori har du kanske stött på Einstein-Hilbert-verkan för gravitationsfältet:

$$S_{\text{grav}} = \int d^4x R \quad (4.1)$$

vars Euler-Lagrange-ekvationer är Einsteins fältekvationer. (Jag kommer inte att diskutera gravitation mer i detalj, men det klarnar kanske snart varför jag nämner det här.) Motsvarande verkan för elektromagnetiska fältet är

$$S_{\text{EM}} = \int d^4x {}^*F^{2*} = \int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \int d^4x F_{\mu\nu}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma} \quad (4.2)$$

där $F_{\mu\nu}$ är elektromagnetiska **fält-tensorn** som sammanfattar elektriska fält $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ och magnetiska fält $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ i en matris:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Övning 8: Visa att $F_{\mu\nu}\eta^{\mu\rho}F_{\rho\sigma}\eta^{\sigma\nu} = \text{tr}(F\eta F\eta) = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2/c^2)$. Varför är Einstein nöjd nu?

På samma sätt som vi bakade ihop energi och rörelsemängd till 4-rörelsemängd $p^\mu = (E, \vec{p})$ för $\mu = 0, 1, 2, 3$ kan vi baka ihop laddningstäthet ρ och elektrisk ström \vec{J} till 4-ström $J^\mu = (\rho, \vec{J})$. Med 4-ström-källa $J_\mu A^\mu$ blir Euler-Lagrange-ekvationerna för S_{EM} Maxwells ekvationer. Utskrivna är de:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \quad (4.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (4.5)$$

Utan källa ($\rho = 0$, $\vec{J} = \vec{0}$) är det en övning i vektoranalys (ta rotationen $\vec{\nabla} \times$ av ekvationerna⁶) att visa att komponenterna uppfyller vågekvationen, t.ex. för elektriska fältet \vec{E}

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \square \vec{E} = 0 \quad (4.6)$$

⁶Det finns ett snyggare sätt, men det är bra att prova olika.

där box-operatorn \square till höger bara är ett kompakt sätt att skriva ekvationen till vänster. Lösningen är superposition av planvågor $\vec{E}(x) = \vec{\epsilon} e^{ik_\mu x^\mu}$ där $\vec{\epsilon}$ är polarisations-riktningen som är konstant, och $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$. För en planvåg i z -led har vi $k_\mu x^\mu = -k^0 x^0 + \vec{k} \cdot \vec{x} = -\omega t + k_z z$, så $\square \vec{E} = 0$ blir

$$0 = \square e^{ik_\mu x^\mu} = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) e^{i(-\omega t + k_z z)} = \left(-\frac{1}{c^2} \omega^2 + k_z^2 \right) e^{ik_\mu x^\mu} = k^\mu k_\mu e^{ik_\mu x^\mu} . \quad (4.7)$$

Vi vet från tidigare att för en partikel med vilomassa m så är $p \cdot p = -mc^2$. Om $m = 0$ så är alltså $p \cdot p = 0$, som kallas att 4-vektorn p^μ är "ljus-artad" (*lightlike*).

För att sammanfatta: Maxwells ekvationer (4.4), (4.5) ger vågekvationen $\square \vec{E} = 0$. Specifikt för planvågor $\vec{E}(x) = \vec{\epsilon} e^{ik_\mu x^\mu}$ är vågekvationen ett villkor på k^μ som motsvarar ett fält med $m = 0$.⁷

Vågekvationen är en 2:a ordningens differentialekvation, precis som Newtons 2:a lag: en *rörelse-ekvation*. Tänk dig en våg på en sträng, där vi kan specificera 2 initialvillkor: initialläge och initialhastighet i varje punkt.

En aspekt som är viktig senare: hur många villkor ställer det här på fältet? Planvåg är inte en allmän lösning till Maxwells ekvationer. Men har vi väl antagit den formen så är det bara ett villkor: enligt ovan $-\frac{1}{c^2} \omega^2 + k_z^2 = 0$, så med $k = k_z$ kan villkoret skrivas som $\omega = ck$. Med $\omega = 2\pi f$ och $k = 2\pi/\lambda$ blir villkoret för frekvensen $f = c/\lambda$. Det borde kännas tryggt från vågfysik.

5 Gauge-invarians

Lagrange utvecklade sin omformulering av Newtons mekanik 1788 delvis för att effektivt besvara mekanikfrågeställningar med tvång. Antal *frihetsgrader* (fria variabler) är antal variabler man börjar med, minus antal tvång. Som tumregel är en 1:a ordningens differentialekvation ett "tvång". Det ger ingen frihet att specificera t.ex. initialhastighet, bara initialläge.⁸

Beskrivning av elektriska fält $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ och magnetiska fält $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ med 6 storheter, eller ekvivalent den antisymmetriska tensor $F_{\mu\nu}$, är redundant. Jag börjar med att visa att 4 variabler verkar räcka, vi behöver inte alla 6. Siffran 4 har fördelen att det går att kombinera till en 4-vektor, som vi isåfall vet hur den transformerar under Lorentz-transformationer.

Ett sätt att reducera från 6 till 4 frihetsgrader är att "delvis lösa" Maxwells ekvationer, som följer. Från vektoranalys är divergensen av rotationen av ett vektorfält alltid noll, så sätter vi magnetiska fältet $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ för något \vec{A} löser vi automatiskt Maxwells ekvation $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Det kan verka som att det inte reducerar antalet variabler. Men på liknande sätt kan vi uttrycka elektriska fältet i en elektrisk potential A_0 . (Potential i volt ger fält i volt per meter.) Vi sammanfattar till en 4-potential $A_\mu = (A_0, \vec{A})$. Både (\vec{E}, \vec{B}) fås från (A_0, \vec{A}) med en derivata, så nu har vi bara 4 variabler. Med andra ord har vi en relation mellan tensor $F_{\mu\nu}$ från ekv. (4.3) och en ny 4-vektor A_μ . Relationen blir:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (5.1)$$

Elektromagnetiska potentialen A_μ representerar *elektromagnetiska fältet*, alltså elektriska och magnetiska fält i samma veva. När vi går till kvant-teori för elektromagnetiska fältet kommer den minsta enheten av A_μ (åtminstone traditionellt uttryckt) att vara vår foton. Då kommer vi att se att även 4 storheter är redundant i en viss bemärkelse, och vi kan få ned det till 2. (Men då kan man fråga sig, kan sådan extrem sparsamhet respektera Lorentz-symmetri?)

Ekv. (5.1) är antisymmetrisk (en *Bianchi-identitet*), som leder till en ny sorts symmetri: ekv. (5.1) är invariant om potentialen A_μ transformerar under *gauge-transformationen*

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda \quad (5.2)$$

⁷Jag undviker tills vidare att säga att *foton-fältet* är masslöst, för det här är klassisk fysik.

⁸Det här är bara för att få en känsla. Det går inte att upprätthålla en sådan regel i allmänhet, för en 2:a ordningens differentialekvation går att skriva om som två 1:a ordningen. Den sammanhängande teorin för tvång är Diracs teori.

för vilken skalär funktion λ som helst. Det tar bara en rad att visa att elektriska och magnetiska fälten är oförändrade av en gauge-transformation:

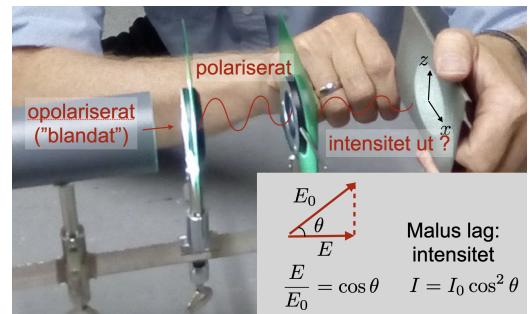
$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu(A_\nu - \partial_\nu\lambda) - \partial_\nu(A_\mu - \partial_\mu\lambda) = \underbrace{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}_{F_{\mu\nu}} - \underbrace{\partial_\mu\partial_\nu\lambda - \partial_\nu\partial_\mu\lambda}_{=0} \quad (5.3)$$

där “= 0” gäller för att partiella derivator kommuterar, givet ett kontinuitetsvillkor.

Hur skall vi förstå gauge transformationen ekv. (5.2)? Specialfallet av ekv. (5.2) att λ är en linjär funktion reducerar till addition av en konstant till potentialen. Då är symmetrin i ekv. (5.3) inget konstigare än att en konservativ kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ inte ändras om vi skiftar lägesenergin V med en konstant. Mer specifikt, för gravitationell lägesenergi $mgh' = mgh + mg \cdot \Delta h$ är det påståendet att kraften mg är oförändrad om vi flyttar referensnivån $h = 0$.

Men här får a vara vilken kontinuerligt deriverbar funktion som helst.

Om du har provat polarisationsfilter som i bilden till höger vet du att elektromagnetiska vågen som är ljus har två polarisationer, vinkelräta mot rörelseriktningen. De här filtren ger linjärpolariserat (horisontellt/vertikalt) ljus, men vi kan producera cirkulärpolariserat (höger/vänster) genom att fördröja ena komponenten med ett kvarts varv, t.ex. med en **Fresnel-romb**. En kvarts varv är multiplikation med i i komplexa talplanet så cirkulär polarisering beskrivs t.ex. som $\epsilon^\mu = (0, 1, i, 0)$ och $\bar{\epsilon}^\mu = (0, 1, -i, 0)$ för en våg i z -led ($\vec{p} \propto \hat{z}$), då är $\vec{p} \cdot \vec{\epsilon} = 0$. Vi kan också kalla ϵ och $\bar{\epsilon}$ för ϵ^s där $s = \pm 1$ för “spinn”.



Att vågen går i z -led och roterar i just xy -planet är ett koordinatval. Det vore bra att inte behöva välja. Det går att hitta ett något “svagare” gaugeval där vågen är transvers i rumtidsmening: Lorentz-gauge, $\partial_\mu A^\mu = 0$ är Lorentz-invariant. (Inte stavfel: danske fysikern Lorentz, holländske fysikern Lorentz.) För en planvåg $A^\mu(x) = \epsilon^\mu e^{ip_\mu x^\mu}$ har vi då

$$p_\mu A^\mu(x) = p_\mu \epsilon^\mu e^{ip_\mu x^\mu} = -i\partial_\mu \epsilon^\mu e^{ip_\mu x^\mu} = -i\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (5.4)$$

Villkoret $p_\mu A^\mu = 0$ kallas ibland att vågen är “transvers”, men notera att det är rumtidsmening, vilket bara implicerar $\vec{p} \cdot \vec{A} = 0$ om dessutom $A_0 = 0$. Att bara kräva $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ kallas Coulomb-gauge, det är alltså inte Lorentz-invariant.

Om vi betraktar rörelseekvationen i förra sektionen som ett villkor som minskar antalet frihetsgrader i A_μ till 3, så tar transversalitet ned det ytterligare till 2 polarisationer. Det verkar bra.

6 Varför inte bara säga att varje komponent av A^μ är en “vågfunktion”?

Något som inte framgår så tydligt i en del läroböcker i kvantmekanik är varför vi nu inte direkt kan kombinera klassisk elektromagnetism med kvantmekanik och få en “relativistisk kvantmekanik”. Problemet går att se redan för vågekvationen för 4-potentialen, eller lite mer allmänt *Klein-Gordon-ekvationen*, följande 2:a ordningens differentialekvation:

$$\square\phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\phi = 0 \quad (6.1)$$

för något fält ϕ . Det är vågekvationen plus en till term, som är noll då $m = 0$. (Det kan vara förvirrande att det förekommer \hbar trots att den i sig är en klassisk ekvation, men det är enhetsanalys: boxoperatorn är andraderivata i rummet, så m^{-2} .) Varje komponent av Maxwell-fältet uppfyller alltså Klein-Gordon-ekvationen för $m = 0$. Beräknar vi

$$\frac{\partial}{\partial t} 100\% = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t)\psi(x, t)dx \quad (6.2)$$

så blir det automatiskt noll om $\psi(x, t)$ tidsutvecklas enligt Schrödinger-ekvationen (prova gärna att visa det!), men inte om $\psi(x, t)$ skulle tidsutvecklas enligt Klein-Gordon-ekvationen. Det verkar då lite som en slump varför det funkade med Schrödinger-ekvationen! I Susskinds bok introducerar han ett perspektiv som hjälper med det: definiera ett mer information-teoretisk grundregel att "distinktioner är bevarade (i tiden)", som är så fundamentalt att han kallar det "lag minus ett". Susskind visar då att den grundregeln implicerar Schrödingerekvationen. Men framför allt visar det att sannolikhetsbetydelsen av vågfunktionen har informationsteoretisk grund, som är den naturliga hemvisten för sannolikhetslära: Schrödinger-ekvationen är inte logiskt oberoende av Borns regel.

Lite som en bonus implicerar den uträkningen i Susskind alternativt Heisenbergs rörelseekvation, som är den vi använder i kvantfältteori.

Born säger själv i sin nobelföreläsning: "Again, an idea of Einstein's gave me the lead. He had tried to make the duality of particles — light quanta or photons — and waves comprehensible by interpreting the square of the optical wave amplitudes as probability density for the occurrence of photons. This concept could at once be carried over to the ψ -function." [19].

7 Kvantelektrodynamik (QED)

7.1 Fotonen

Enligt experimentet med fotoelektriska effekten så är det makroskopiska elektromagnetiska fältet uppbyggt av fotoner med $E = hf = \hbar\omega$. De har tydligen två tillstånd, t.ex. vertikalpolariserad eller horisontalpolariserad, eller cirkulärpolariserad vänster/höger, men kan kvantmekaniskt vara i en superposition. Notera att om vi sätter klassiska $E = pc$ lika med kvantfysiska $E = hf$ ger det $p = hf/c = h/\lambda = \hbar k$ med vågtalet $k = 2\pi/\lambda$. Så vi kan ersätta $k^\mu = p^\mu/\hbar$ i vågen ovan.⁹

Enligt förra delkapitlet skall vi inte kopiera elementär kvantmekanik med vågfunktionen ψ , utan istället kopierar vi operator-formuleringen med \mathbf{a}^+ , \mathbf{a}^- . Steg-operatorerna skall nu inte bara skapa abstrakt "energi-kvantum", utan en "partikel". Men för en foton av bestämd frekvens f ("färg") är det enligt Einsteins $E = hf$ samma sak! Utan energi ingen partikel.

(Vi vill sedan göra samma sak för elektronen, och där var det före relativitetsteori *inte* utbytbara begrepp: en elektron i vila har ingen energi alls. Men i relativitetsteori har den $E = mc^2$, så då passar det: utan energi ingen viloenenergi, så därmed heller ingen elektron.)

Olika fotoner kan ha olika frekvens, eller färg, eller vågtal \vec{k} , som enligt $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ från första stycket är relaterat till rörelsemängden \vec{p} . Så vi behöver paret \mathbf{a}^+ , \mathbf{a}^- för att lägga till eller ta bort en foton med varje given rörelsemängd \vec{p} . Vi kan skriva det som index $\mathbf{a}_\vec{p}^+$, $\mathbf{a}_\vec{p}^-$ eller argument: $\mathbf{a}^+(\vec{p})$, $\mathbf{a}^-(\vec{p})$, jag väljer det senare.

Kvantfältet för fotonen skrivs som summa (integral) av harmoniska oscillatorer med olika vågtal/rörelsemängd (s.169 i [2])

$$A_\mu(x) = \underbrace{\int d^3p}_{\text{"addera"}} \left(\overbrace{\mathbf{a}^-}^{\text{harm. osc.}} \underbrace{\epsilon_\mu}_{\text{polar.}} \underbrace{e^{ip \cdot x/\hbar}}_{\text{basvåg}} + \mathbf{a}^+ \underbrace{\bar{\epsilon}_\mu}_{\text{andra hållet}} e^{-ip \cdot x/\hbar} \right) \quad (7.1)$$

där ingen addition (integrering) för energin p^0 behövs, eftersom energin E bestäms från vanliga rörelsemängden \vec{p} enligt $E = p^0 c = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{\vec{p}^2 c^2} = |\vec{p}|c$. Vi kräver alltså att $E = |\vec{p}|c$ är uppfyllt för varje basvåg, dvs. för alla olika \vec{p} . Därför uppfyller $A_\mu(x)$ Maxwells ekvationer.¹⁰

Vissa författare sätter en hatt \hat{A}_μ för att poängtera att det är en operator (på grund av \mathbf{a}^+ , \mathbf{a}^-) men eftersom jag använder fetstil för \mathbf{a}^+ , \mathbf{a}^- så bör jag konsekvent isåfall snarare skriva \mathbf{A}_μ . Men jag menar aldrig igen det klassiska fältet om jag inte säger det, så jag gör det inte med fetstil.

⁹De flesta läroböcker, till och med de som försöker vara mest grundläggande som McMahon [2] använder enheter då $\hbar = 1$. Det är det inte alltid tydligt, och jag är nog inte konsekvent.

¹⁰Med det menas att de elektriska och magnetiska fälten man får från 4-potentialen A_μ uppfyller Maxwells ekvationer (4.4). Det går att skriva [ekvationer direkt för 4-potentialen](#) utan att välja gauge som ovan, men de är lite mer komplicerade.

Den ena polarisationen $\bar{\epsilon}_\mu$ är komplexkonjugatet av den andra ϵ_μ , för att fotonen skall vara reell. Fotonen är sin egen antipartikel. Det blir klarare nedan vad det har med det här att göra, men vi kan redan nu att göra följande lilla test: byt rums- och tids-riktning (P för rums-“paritet” och T för tid) och byt polarisationerna (C för “laddnings-konjugering”, jfr. komplex-konjugering). Då är fältet A_μ invariant. Det kallas CPT-symmetri.

Kvantfältet är fortfarande en operator. Så vad är en foton? Man kan säga att $a^+(\vec{p})|0\rangle$ är en foton. Men den är inte lokaliserad. Adderar vi många bas-vågor kan vi få en lokaliserad krusning i ett fält som i sig i princip finns överallt. Repetition av ovanstående, men nu direkt med p istället för k :

$$\text{Re } e^{ip \cdot x/\hbar} = \cos(p \cdot x/\hbar) = \cos(p_\mu x^\mu/\hbar) = \cos((-E/c, \vec{p}) \bullet (ct, \vec{x})/\hbar) = \cos(-\omega t + kz) \quad (7.2)$$

där jag i sista steget valde att vågen är på väg i z -riktningen. Notera att $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$.

Mer om kvant-operatorerna a^- , a^+ från sektion (3): det kan vara konceptuellt förvirrande vad de gör här. Harmonisk oscillator beskriver ju en massa m på en fjäder. Det är ingen fjäder med fjäderkonstant k som håller fast fotonen så den kan oscillera kring ett jämviktsläge. Dessutom är $m = 0$. Så vad betyder ekv. (7.3)?

Som grundidé kan du tänka dig Plancks masugn¹¹, där fotonen var begränsad till ett ändligt område (men stort, jämfört med atomstorlekar). Formellt går det att hålla $\omega = \sqrt{k/m}$ konstant och ta $k, m \rightarrow 0$. Som i Fermis kvant-ideal-gas, han hade först ändligt område, en “låda”, och tog sedan bort lådan.

Kanske bättre är att släppa den bokstavliga kopplingen till klassiska harmoniska oscillatorn och bara ta det som “inspiration”. Faktum är att matematiker har arbetat med steg-operatorer innan kvantfältteori, och mycket mer allmänt, utan att prata alls om massor på fjädrar. Jag tänker här på representationsteori för Lie-grupper och Lie-algebra, där man naturligt “stegar igenom” representationer. Jag återkommer i allmänna diskussionen på slutet vad en partikel isåfall “faktiskt är”.

7.2 Elektronen

I kvantfysik har elektronen spinn 1/2, alltså också två tillstånd, spinn upp och spinn ned, som jag betecknar med ± 1 . Elektronfältet är (Zee kap II.2)¹²

$$\psi_\alpha(x) = \underbrace{\int d^3p}_{\text{“addera”}} \left(\underbrace{\mathbf{b}^-}_{\text{osc. ferm. harm.}} \underbrace{u_\alpha e^{ip \cdot x/\hbar}}_{\text{polar. basvåg}} + \mathbf{d}^+ v_\alpha \underbrace{e^{-ip \cdot x/\hbar}}_{\text{andra hållet}} \right) \quad (7.3)$$

där $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ är uppfyllt för varje basvåg, dvs. för olika \vec{p} . Därför uppfyller $\psi_\alpha(x)$ också Klein-Gordon-ekvationen, som varje komponent av fotonfältet gjorde, men vi kommer att se nedan att elektronfältet uppfyller en annan “faktoriserad” ekvation, som implicerar Klein-Gordon-ekvationen. Nu måste det stämma med pauliprincipen för elektroner i periodiska systemet: om man får ett minustecken för att byta tillstånd hos två elektroner så är det noll sannolikhet att de är i samma tillstånd. Jordan och Wigner förklarade 1928 att för ett reellt fält med \mathbf{b}^+ och \mathbf{b}^- måste de (inte) anti-kommutera istället för att (inte) kommutera, alltså skulle vi ersätta Heisenbergs $[\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+] = 1$ med $\{\mathbf{b}^-, \mathbf{b}^+\} = 1$, där $\{\mathbf{b}^-, \mathbf{b}^+\} = \mathbf{b}^- \mathbf{b}^+ + \mathbf{b}^+ \mathbf{b}^-$ (notera plustecknet).¹³

Stegoperatorn \mathbf{b}^- tar bort en elektron med laddning $-e$. Den andra operatorn måste också ta bort laddning $-e$, annars går de inte att bilda superposition av. Men \mathbf{d}^+ är en skapelse-operator, så den skapar en partikel med laddning $+e$: positronen. Därför kallade jag den operatorn \mathbf{d}^+ och

¹¹“Myt-historia” säger att Planck pratade om masugnar i stålverk, men i artikeln från år 1900 står rätt abstrakt “In einem von spiegelnden Wänden umschlossenen diathermanen Medium”, där diatermisk betyder värmegenomsläpplig.

¹²McMahon väljer såvitt jag ser att bara skippa det, som förstås sparar plats, men jag förstår inte hur det är att “avmys-tifiera” att bara inte tala om saker. Andra saker med McMahon är bra!

¹³Enligt Wikipedia-sidan visar Jordan-Wigner-transformationen att “the distinction between spin-1/2 particles and fermions is nonexistent”, samt även att den funkar bra i högre dimension än 1+1. Bägge påståendena kanske är sanna, men de är isåfall högst icke-triviala. I boken av Piers Coleman kommer det redan i kap.2.

inte \mathbf{b}^+ : den skapar inte en elektron, utan en positron. Koefficienten v_α (polariseringen) i den andra termen är därför polariseringen hos en positron. När koefficienterna framför de två basvägorna inte är komplexkonjugat av varandra är alltså ψ komplex. Apropå notation: jag kommer för det mesta inte att skriva ut indexet på ψ_α ut som ovan, alltså bara ψ . Det hade kanske också varit bra att visa att operatorerna är specifika för spinn $s = \pm 1$. (Jag är inte säker på om jag borde här.)

Det här ger en känsla för att u_α och v_α har $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Det verkar vara dubbelt så många "frihetsgrader" som för spinn upp/ned i vanlig kvantfysik. Men jag skrev frihetsgrad i parentes, för vi säger inte att en elektron på något sätt "består" av en positron: vid mätning är de antingen det enda eller det andra. De fysikaliska, eller kanske mer precist halvklassiska, frihetsgraderna är 2 för elektronen och 2 för positronen, när rörelseekvationen är uppfylld.

Vi vet redan att elektronen inte är fri, den växelverkar (interagerar) med fotonen:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = (\text{Feynman-vertex}) = \bar{\psi}_\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu \psi_\beta = \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \quad (\alpha, \beta \text{ inte utskrivna}) \quad (7.4)$$

Matriserna γ^μ för $\mu = 0, 1, 2, 3$ är de fyra stycken 4×4 gamma-matriserna. De behövs för att koppla ihop (intertwine) spinor-komponenterna α, β (t.ex. "upp"/"ned") med vektor-komponenterna: under en Lorentz-transformation transformerar $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ som en vektor. Har du läst i Susskinds bok har du redan sett rums-versionen av det här: vektorn $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ av Pauli-matriser skulle kunna skrivas $\sigma_{\alpha\beta}^i$ för $i = x, y, z$, och med identitetsmatrisen I bygger Schwartz en variant av γ^μ . Jag tar istället standard-valet för γ^μ på [Wikipedia-sidan](#), där det står en skattkammare av identiteter. Här försöker jag skala bort så mycket matematik jag kan, så vi kan extrahera bara en bit mer fysikalisk information.

Hela poängen med gaugeteori kan sägas vara att abstrahera konstruktionen av QED till matematikernas meny av allmänna symmetri-grupper. Mer fysikaliskt, att systematisera hur man sätter ihop två "fria" teorier, som fotonfält och elektronfält separat, till en växelverkande.

Elektromagnetiska fältet uppfyllde de klassiska Maxwell-ekvationerna, t.ex. för ljus. Inget liknande vardagligt fenomen finns för elektronfältet. Rörelseekvationen för ett relativistiskt spinn-1/2-fält är Dirac-ekvationen

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\psi = 0 \quad (\text{fritt elektronfält}). \quad (7.5)$$

där γ^μ . Feynman hittade på en ännu mer kompakt skrivsätt: för varje 4-vektor v^μ , skriv $\gamma^\mu v_\mu = \not{v}$ (slash notation). Varje komponent ψ_α av elektronfältet uppfyller Klein-Gordon-ekvationen, ekv. (6.1).

Här gör många läroboksförfattare en historisk utsvävning som man sedan erkänner är överspelad. Vi skippar det.¹⁴

Övning 9: visa att Dirac-ekvationen för u , med γ från [Wikipedia](#), sätter $u_3 = u_4 = 0$.

(Tips: välj vilosystemet $p^\mu = (mc, \vec{0})$.) Det är elektronen med 2 frihetsgrader. På samma sätt sätter Dirac-ekvationen $v_1 = v_2 = 0$ för positronen. Så åtminstone i vila kan vi tänka på de två övre komponenterna av elektronfältet ψ_α som elektronen, och de två nedre som positronen.¹⁵ Med "åtminstone i vila" vill jag ge känslan att man inte skall tolka det för bokstavligt: för hög energi är det inte en effektiv separation.

Vad händer med elektronfältet under gaugetransformationen? (I följande diskussion, tänk klassiskt, eller ersätt ψ med u .) Dirac-ekvationen (7.5) är uppenbarligen invariant under multiplikation med ett komplext tal, där talet är oberoende av x^μ , alltså "lika överallt" (kallas global gauge-transformation). Vi kan prova att generalisera den multiplikationen till rumtidsberoende (lokal gauge-transformation):

$$\psi' = e^{i\alpha(x)} \psi. \quad (7.6)$$

Derivatan ∂_μ i Dirac-ekvationen verkar på faktorn $e^{i\alpha(x)}$ med produktregeln:

$$\partial_\mu \psi' = \partial_\mu (e^{i\alpha(x)} \psi) = e^{i\alpha(x)} (i\partial_\mu \alpha(x)) \psi + e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi \quad (7.7)$$

¹⁴Är du nyfiken, se Zee kap.II.2, "Poetic but confusing metaphors", eller Schwartz mer lakoniska kommentar "total nonsense" (!) i sektion 9.1.1.

¹⁵Man kan undra varför det isåfall heter "elektronfältet", det kunde lika gärna heta "positronfältet". Så är det.

där jag också använde kedjeregeln. Nu är poängen att A_μ i sin gauge-transformation producerar en liknande irriterande extraterm: betrakta

$$iA'_\mu\psi' = i(A_\mu - (\partial_\mu\alpha))e^{i\alpha(x)}\psi = e^{i\alpha(x)}iA_\mu\psi - e^{i\alpha(x)}(i\partial_\mu\alpha(x))\psi. \quad (7.8)$$

Så lägger vi till $iA_\mu\psi$ till Dirac-ekvationen tar vi ut extratermen i (7.7) i dess transformation. Den modifierade Dirac-ekvationen har nu fotonfältet inbyggt:

$$(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi = 0 \quad (\text{gauge-kovariant derivata } D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu) \quad (7.9)$$

och är kovariant (alla termer transformerar lika) under den totala gauge-transformationen som verkar på både ψ och A_μ . Vi hade kunnat vända på det: för att ta ut gauge-transformationen hos A_μ måste vi låta elektronfältet transformera som ekv. (7.6).

Kovariant är en bra början. För att få något invariant använder vi Lagranges metod: vi kan härleda ekv. (7.9) från en Lagrange-täthet som är $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ gånger (7.9). "Härledningen" är bara att derivera med avseende på $\bar{\psi}$, det vi multiplicerade med.

Det är inte detaljerna utan hela tillvägagångssättet med gaugetransformationen som är fundamentalt: det visar hur kravet om gauge-invarians kan fastlägga vad växelverkan måste vara. Den abstraktionen visar nu vägen till en oändlig mängd möjliga modeller: ekv. (7.6) är för enklaste möjliga Lie-gruppen U(1), men ta vilken Lie-grupp som helst.

Matematiker hade alltså identifierat allt det här innan Dirac: kombinationen $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$ är en *kovariant derivata*, som används i differentialgeometri¹⁶. Med matematiken ovan kan vi säga att fotonen transformerar i adjungerade representationen och elektronen i vektor-representationen.

Förut skrev jag att elektron-kvantfältet ψ är i en spinor-representation! Men det var transformation under Poincaré-gruppen, inte gauge-gruppen. För att inte blanda ihop dem kan man säga att Poincaré-gruppen är *extern* (det "syns utåt" om något är vektor eller skalär), och gauge-gruppen *intern* (märks mer indirekt, manifesterar sig i att partiklar med en laddning transformerar på ett sätt, de med motsatt laddning på konjugerat sätt).

Den kanske mest konkreta förutsägelsen från kvantelektrodynamik är att elektron-spinnet halv-klassiskt ger upphov till ett magnetiskt moment $\mu_B = e/(2m_e)$ från följande extra-term ("extra" jämfört med ett fält utan spinn och elektrisk laddning):

$$\not{D}^2 = (\gamma^\mu D_\mu)^2 = D^2 + \frac{ie}{8}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]F_{\mu\nu} \quad (7.10)$$

Det är uppgift 10.1 i Schwartz att visa det. (Som ofta i atomfysik spelar många saker in: uppgiften har 8 deluppgifter.) Det tillkommer små kvantkorrektioner 0,2% till μ_e , som har uppmätts. Inte bara i tredje värdesiffran som behövs för att testa 0,2%, utan ända till 11 värdesiffror, $\mu_e = -9,2847647043 \cdot 10^{-24}$ J/T.

Så elektronfältet uppfyller i och för sig en liknande rörelseekvation som fotonfältet, men extratermen med e i (7.10) skiljer representationerna åt. I matematik kallas derivataoperatorer med sådana extratermer Laplace-Beltrami-operator, eller \not{D} faktiskt Dirac-operator.

Nedan kommer vi att behöva explicita lösningar. (McMahon gör det här på s.95-122, i Zee är det en övning.)

Det är praktiskt att skriva även elektronens spinn som cirkulär polarisering (se t.ex Schwartz kap.5.3), eller mer visuellt, *helicitet*, från *helix*, spiral. I Susskinds notation motsvarar det spinn-axel "in" och "ut".

7.3 S-matrisen

I grundläggande kvantmekanik räknar man ut sannolikheter för var elektronen är. Ingen partikel försvinner eller tillkommer, dvs. partikelantalet är bevarat. Men som Heisenberg poängterade redan

¹⁶Du kanske har stött på kovariant derivata i allmän relativitetsteori, med Christoffel-symboler $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$. Det är samma idé, men A_μ är på ett sätt enklare, med färre index. Matematiskt har det här ytterligare struktur utöver en mångfald: ett fiberknippe (*fiber bundle*). Då kallas A_μ och $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ båda "sammanhang" (*connection*), medan $F_{\mu\nu}$ och $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ är krökningar.

i sin artikel från 1925, elektronens specifika *läge* är egentligen ingen särskilt viktig fråga i atomfysik. Antalet fotoner i atomen är enligt spektrallinje-experimenten inte bevarat. Det man skulle vilja räkna ut är sannolikheten att producera en foton.

I kvantfältteori är utgångspunkten alltså att antalet partiklar inte behöver vara bevarat. Vi vill redan från början konstruera en *flerkroppsteori* (*many-body theory*). Frågan är övergångs-sannolikheten (*transition probability*), som i atomfysik. I ett spridningsexperiment kan vi skriva:

$$\langle \text{out}, \infty | \text{in}, -\infty \rangle_{\text{Schrödinger}} = \langle \text{out} | S | \text{in} \rangle_{\text{Heisenberg}} . \quad (7.11)$$

Grundidén är att spridningstillstånd tidsutvecklas så de kan approximeras av fria tillstånd:

$$e^{-iHt} |\psi\rangle \rightarrow e^{-iH_0 t} |\text{in}\rangle \text{ för } t \rightarrow -\infty , \quad e^{-iHt} |\psi\rangle \rightarrow e^{-iH_0 t} |\text{out}\rangle \text{ för } t \rightarrow +\infty . \quad (7.12)$$

Det här är problematiskt i teorier med krafter med oändlig räckvidd, som elektromagnetism. Vi börjar med att ignorera det problemet, men en hel del forskning just nu handlar om det.

Vi vill ha den tidsutvecklingen uttryckt som en operator, som Heisenberg. Implementera det som $|\psi\rangle = \Omega_+ |\text{out}\rangle = \Omega_- |\text{in}\rangle$ med Møller-operatorn Ω :

$$\Omega_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-H_0 t} \quad (7.13)$$

som leder till

$$|\text{out}\rangle' = S |\text{in}\rangle \quad \text{med} \quad S = \Omega_+^\dagger \Omega_- . \quad (7.14)$$

Jag satte ett prim för att markera att det *inte* menas ett enda specifikt ut-tillstånd, för då ser det ut som det ointressanta resultatet $\langle \text{out} | S | \text{in} \rangle = \langle \text{out} | \text{out} \rangle = 1$. Poängen med S är istället att transformera in-tillståndet i den fria teorin till ett ut-tillstånd i den fria teorin, och se vad överlappet mellan dem är, som ger övergångs-sannolikheten.

Det kan vara lätt att blanda ihop klassisk tidsutveckling och den här tidsutvecklingen. Varje komponent av ett klassiskt fält uppfyller t.ex. Klein-Gordon-ekvationen, det är hur det klassiska fältet utvecklas i tiden. Det är inte direkt relaterat till övergångssannolikhet. Fältoperatorn uppfyller å andra sidan Heisenbergs rörelseekvation, som liksom Schrödingerekvationen följer från informations-teoretiskt perspektiv, och relaterar till sannolikheter. Kravet är nu *inte* att partikelantalet är bevarat, utan det svagare kravet att S-matrisen som helhet är unitär, vilket motsvarar att det är 100% chans att *något* händer, för de tillstånd vi har med i beskrivningen.¹⁷

Som i Modern-fysik-anteckningarna uttrycker vi antalet partiklar som kommer i ett visst vinkelintervall per tidsenhet som *rate* R , och för givet flöde Φ in, så har vi $R = \Phi \sigma$, där σ är en ekvivalent tvärsnittsarea. För en elektron som sprids mot en proton blir tvärsnittet enligt Rutherford, för ett rymdvinkelintervall $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{\text{cm}}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{64\pi^2 v^2 p^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (7.15)$$

(Man kan protestera att Rutherford inte skickade elektroner mot protoner i experimenten, utan alfa-partiklar mot guldatomkärnor. Men Rutherfords härledning var för Coulombkraft mellan två partiklar med givna laddningar, så själva härledningen gäller likaväl för elektroner mot protoner.)

¹⁷Den här lite kryptiska formuleringen är det bästa jag kan komma på för att kort uttrycka följande (har du förbättringsförslag, säg till så kan jag ta bort den här fotnoten!). Det är i och för sig logiskt nödvändigt att det är 100% chans att *något* händer. Men även i vanlig sannolikhetslära har det påståendet ett implicit antagande att vi har tagit hänsyn till alla möjliga utfall. I praktiken ingår ofta antaganden som att total energi är bevarad. En icke-ideal detektor (som alla verkliga detektorer) kan "tappa bort" partiklar som bär energi, t.ex. fotoner med mycket låg energi. Det finns alltså processer där energi verkar försvinna, som vi bäst tänker på som "mätfel". En liknelse för tärningsslag är att tärningen landar i en ojämnhet på ett bord, och inte visar något entydigt resultat. I praktiken räknar man bort det, så att alla *acceptabla* utfall ändå är 100%. Skulle en stor bråkdel behöva räknas bort kan man ifrågasätta hela upplägget, som att spela Yatzy på en sandstrand.

7.4 Relativistisk Rutherford-spridning

Det börjar bli dags att räkna ut något. Det diskuteras t.ex. i McMahon s. 179-185 eller Schwartz kapitel 13.4.1 att Feynman-diagrammet för $e^-p^+ \rightarrow e^-p^+$ ger, med γ_μ Dirac-matriserna och $\not{p} = \gamma_\mu p^\mu$, sannolikhetsamplitud i kvadrat att en elektron skall spridas från en proton:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4t^2} \text{Tr}((\not{p}_1 + m_e)\gamma_\nu(\not{p}_3 + m_e)\gamma_\mu) \text{Tr}((\not{p}_4 + m_p)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_e)\gamma_\nu) \quad (7.16)$$

Notera att det här är Lorentz-invariant: Dirac-matriserna har vi tagit spår (*trace*) över, och indexen μ, ν är kontraherade, dvs. som $p^\mu p_\mu$, som du visade är invariant i Övning 1.

Vi kan göra invariansen *manifest* ("tydlig", men det är egentligen subjektivt hur tydligt det är) genom att uttrycka ekv. (7.16) i Mandelstam-variablerna $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$ och $u = (p_1 - p_4)^2$, som alla tre är invarianta, även det enligt Övning 1.

Övning 10: Visa att multiplicera ihop 4×4 -matriserna och ta spåren "Tr" ger

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{2e^4}{t^2} (u^2 + s^2 + 4t(m_e^2 + m_p^2) - 2(m_e^2 + m_p^2)^2)$$

uttryckt i Mandelstam-variablerna s, t, u , samt elektronmassan m_e och protonmassan m_p .

Det här är i allmänhet ett smidigt sätt att uttrycka det på, och de flesta forskningartiklar om beräkning av spridningsamplituder stannar här. (Eller kommer inte ens hit, för de räknar ut \mathcal{M} och inte $|\mathcal{M}|^2$, vilket nyare forskning visar kan vara ett misstag.) Men vad betyder resultatet från övningen fysikaliskt? I laboratoriets koordinatsystem och med $m_p \gg m_e$ kan vi sätta

$$p_1^\mu = (E, \vec{p}_i), \quad p_2^\mu = (m_p, 0), \quad p_3^\mu = (E, \vec{p}_f), \quad p_4^\mu = (m_p, 0), \quad (7.17)$$

Spridningsvinkeln θ får vi från $\vec{p}_i \cdot \vec{p}_f = p^2 \cos \theta$, och hastigheten $v = p/E = \sqrt{1 - m_e^2/E^2}$.

Med formeln för tvärsnittet uttryckt i $|\mathcal{M}|^2$ i ekv. (7.15) ovan får vi:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{64\pi^2 v^2 p^2 \sin^4(\theta/2)} (1 - v^2 \sin^2(\theta/2)) \quad (7.18)$$

som kallas *Motts formel*. Kom ihåg att via $R = \Phi \sigma$ får vi *rate* R , hur mycket partiklar det kommer i en viss riktning, från inkommande flöde Φ och effektiva tvärsnitts-arean σ . För $v \ll 1$, dvs. $v \ll c$, kan vi försumma v^2 -termen i parentesen, då reducerar Motts formel till Rutherfords formel (7.15) för elektroner. Experiment vid Stanford på 1950-talet visade avvikelser från Rutherfords formel. Hade vi inte tagit hänsyn till relativitetsteori hade vi kunnat oroa oss att det skulle vara anledningen till avvikelserna. Men tack vare att Mott hade räknat ut den relativistiska formeln i ekv. (7.18), så var slutsatsen istället att protonen måste ha substruktur, alltså inte vara en elementarpartikel.

8 Vad är en foton?

Det verkar konstigt att A_μ inte är gauge-invariant. Kan vi verkligen säga att fotonen "är" A_μ ? Kan man inte jobba direkt med $F_{\mu\nu}$, som vi gjorde med gamla hederliga elektriska och magnetiska fält? Första svaret på den frågan är att ordet "konstigt" inte är väldefinierat: för uttrycket med Mandelstam-variabler ovan så förstörde jag den fina Lorentz-invariansen och gick till laboratoriets koordinatsystem, för att jämföra med mätare i det koordinatsystemet, och bygga upp intuition. Det kanske är med gauge som med koordinatsystem, att t.ex. Lorenz-gauge kanske kan betraktas som "naturligt" för att tänka på fotoner, även om det mer allmänt är ett godtyckligt val.

Men ändå? Ett lite mer "kreativt" objekt som fångar diskussionen ovan är Wilson-loopen:

$$W = e^{\oint d^4x A_\mu dx^\mu} \quad (8.1)$$

Integralen runt en sluten kurva gör att W är *ickelokal*: den är inte bara definierad i en punkt utan beror på värdet på fältet på flera ställen. Men om integralen går över ett litet parallelogram med sida ϵ kan man visa med Stokes sats (Schwartz ekv. (25.51)) att

$$W \approx 1 + \int F_{\mu\nu} ds^{\mu\nu} + \dots \quad (8.2)$$

där $ds^{\mu\nu}$ är ett ytelement i rumtiden. Man kan också istället för en Wilson-loop betrakta en Wilson-linje som går från en elektron till oändligheten, likt en fältlinje. Det är början till *klädda* (*dressed*) tillstånd, där en elektron ofrånkomligen har sitt fält med sig.

Ett annat sorts försök att mer allmänt börja besvara frågan vad är en partikel "egentligen är" är Wigners matematiska definition av partikel, som jag diskuterar mer i mina avancerade anteckningar, men de är riktade till matematiker. En sammanfattning för fysiker finns i Weinberg [6], volym 1.

Du bör nu ha fått känslan att lite av varje kan hända i kvantfältteori. Det kan vara ett bra tillfälle att ta en titt på sidan för [fotonens struktur](#), betraktad som kvantfält. En normal reaktion efter att ha klickat på föregående länk är "Vadå *kvark-innehåll*?" Fotonen kan inte bara förvandlas till elektron-positron-par, utan även kvarkar-antikvarkar, och därigenom gluoner. Så ur ett "likaberättigat" perspektiv går det att tänka sig att fotonen "består" av alla de partiklarna. Det kan låta som en lite väl kreativ formulering, men det är inte helt olikt bemärkelsen i vilken protoner består av kvarkar, som du kanske redan tror på. Poängen är att "består av" är ett lite mer allmänt begrepp i kvantfältteori än vad det kanske är i vardagsord.

(Här är ett, kanske tafatt, försök till liknelse. Det sägs att man kan mäta koncentrationen av vätejoner H^+ med tungan, som pH-värde: hur surt det är. I grundläggande atomfysik säger vi att H^+ "består av", eller "är", en ensam proton. Men ensamma protoner i vätskelösning finns inte. De vore 100 000 gånger mindre än andra joner och atomer, med enorm relativ laddningsdensitet. I själva verket existerar H^+ i vattenlösning bara som [vatten-joner](#) eller varianter därav. All mätning av H^+ -koncentration är därför indirekta mätningar via andra joner i olika grad av komplexitet. Så att tänka sig ensamma protoner i syran är en överförenkling av det komplicerade som verkligen händer i omgivningen av andra atomer. I kvantfältteori utgör andra fält än det man vill fokusera på en slags "omgivning", som på liknande sätt som vätskelösning inte går att bli av med. Ensamma partiklar är i den bemärkelsen alltid förenklingar, om än mycket användbara sådana.)

9 Stark och svag kärnväxelverkan

Vi såg ovan att fotoner transformerar under gaugetransformationer i adjungerade representationen, och elektronen i "vanliga" (fundamentala) representationen av $U(1)$. Jag sade att vi kan ju prova andra Lie-grupper och få meningsfull växelverkan för dem också. Den idén hade flera fysiker, t.ex. Pauli, men Yang och Mills skrev ned det tydligast, och växelverkande teorier med andra Lie-grupper än $U(1)$ kallas *Yang-Mills-teori*.

Det är viktigt att genast påpeka att det inte alls vore nödvändigt att naturen *måste* använda sig av den här matematiska strukturen. Det är experiment som avgör vad som verkligen behövs för att beskriva mätdata. Men som jag nämnde ovan i samband med Lie-algebra, den här sortens teori är i alla fall lite speciell just när det gäller kvantfält med spinn 1.

Vi börjar med stark kärnväxelverkan. Experiment visade tidigt att protonens byggstenar, som nu kallas kvarkar, verkade ha en trevärd laddning, som idag kallas *färg*, t.ex. röd, grön och blå. Det finns inte så många grupper som har vektor-representation med tre komponenter. En är $SU(3)$, en annan $SO(3)$. Ekv. (7.6) för elektronen ersätts med $\psi' = e^{i\alpha^a} \psi$ för en kvark. Transformationen för gluonen skall enligt erfarenheten med QED alltså vara i adjungerade. $SO(3)$ har 3, $SU(3)$ har 8, så de ger olika förutsägelser för växelverkan. Det går att uttrycka vidare experimentresultat som att gluonen har 8 frihetsgrader, så de beskrivs av $SU(3)$. Så gluonfältet är $A_\mu^a t^a$ där de åtta 3×3 -matriserna t^a för $a = 1, \dots, 8$ kallas [Gell-Mann-matriserna](#), en $SU(3)$ -version av Pauli-matriserna för $SU(2)$. (Gell-Mann-matriserna ersätts gärna av en mer [allmän konvention](#), men det är värt att ha hört talas om

dem.) Lagrange-tätheten får vi genom att kontrahera a -indexet:

$$\mathcal{L}_{\text{gluon}} = F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \quad (9.1)$$

vars Euler-Lagrange-ekvationer är Yang-Mills-rörelseekvationerna. Med en Dirac-ekvation behöver vi bara sätta ett index a på kovarianta derivatan D_{μ}^a , då ger nu rörelseekvationerna för gluoner kopplade till kvarkar.

Om det verkar som jag bara upprepar vad vi gjorde för kvantelektrodynamik, så är det det som är poängen!

Det som är nytt i *svag* kärnväxelverkan, den som är ansvarig t.ex. för betasönderfall (och därigenom att solen lyser), är att kraftbärarna W^{\pm} och Z är massiva. De har då *tre* polariseringar i motsats till fotonens två: den tredje är longitudinell, utöver de två transversa. Men hur skriver man en gaugeinvariant mass-term i Lagrange-tätheten? För elektronen hade vi $\bar{\psi}\psi$, som är gauge-invariant, men motsvarande $A_{\mu}A^{\mu}$ vore inte gauge-invariant. Om vi smyger in ett nytt skalärfält α funkar

$$(mA_{\mu} + \partial_{\mu}\alpha)(mA^{\mu} + \partial^{\mu}\alpha) \quad (9.2)$$

om det nya skalärfältet α transformerar motsatt A_{μ} . Problemet är nu att α själv inte kommer att ha en gauge-invariant massterm. Så α bör vara masslös, men då borde vi ha upptäckt den. Lösningen är att gauge-symmetrin realiseras via Higgs-mekanismen, som inte är spontant symmetribrott.

10 Spontant symmetribrott kontra Higgs-mekanismen

Jag skrev "inte" i förra stycket för att försöka hjälpa dig att undvika en vanlig förvirring: att "bryta" symmetri är ganska meningslöst för en gauge-symmetri, som bara är en redundans i beskrivningen. En gauge-symmetri kan däremot vara "gömd". Det betyder att vissa experiment (t.ex. vid mycket låg energi) beskrivs väl med approximationen att symmetrin inte är där, helt enkelt för att det blir försumbart att gauge-fältet självt deltar i sådana processer, för att dess viloen energi är för hög. Men hela poängen är att andra experiment (t.ex. vid högre energi) måste märka symmetrin, annars vore det ointressant att prata om det gauge-fältet överhuvudtaget.

Weinberg tar upp exemplet att om vi har ekvationen $x^2 = 1$ så har den lösningarna $x = -1$ och $x = 1$. Om vi bestämmer oss för lösningen $x = 1$ har vi brutit symmetrin mellan positivt och negativt. Men vi kan fortfarande komma från den ena till den andra med avbildningen $x \rightarrow -x$.¹⁸

Lärdomen är att ett fysikaliskt tillstånd inte behöver respektera naturlagars symmetri, som när vatten fryser till is, eller järn magnetiseras (domäner), eller niob blir supraledande. Magnetisering beskriver jag i [anteckningarna om statistisk fysik](#), uppgift A3.6.

11 Higgs-mekanismen

Goldstones sats är att spontant symmetribrott av en symmetri som är *konstant* i rumtiden (global) leder till masslösa fält α . En liknande mekanism för lokal (rumtids-beroende) symmetri ger fält med massa. Man säger att en kraftbärare som först är masslös "äter upp" skalärfältet som skulle ha varit Goldstone-fältet, och blir massivt.

Det här låter abstrakt, men har flera konkreta implikationer. En är att det gör det möjligt att konstruera en Lagrange-funktion som tar hänsyn till det experimentella faktum att kvarkar och leptoner kopplar *kiralt* till W -bosoner. Ordet "kiralt" betyder att vänstercirkulär-polariserade/höger-cirkulärpolariserade partiklar kopplar olika betraktade som representationer av $SU(2)$ för svag växelverkan:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad \text{kiralt: } \psi_L = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} \psi_R = \bullet \quad (11.1)$$

¹⁸För dig som gillar matematik: studiet av permuteringar av lösningar till polynomekvationer kallas [Galois-teori](#). Den förklarar bl.a. varför 5:e-gradsekvationer är första fallet där ingen allmän "pq-liknande formel" går att konstruera. De sista 10 åren har ny forskning visat att Galois-teori överraskande [relaterar](#) vissa komplicerade uträkningar i kvantfältteori. (Referens "Cartier 01" på den sidan nämner att det är jag som skall göra det till ett praktiskt verktyg. Vi får se.)

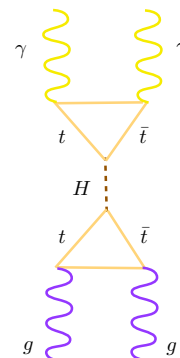
vilket upptäcktes av Wu redan 1956, som ledde till nobelpriset 1957 (fast inte till Wu). Att skriva ett kvantfält med vänster och höger är bara ett basbyte från det vi skrev ovan (Dirac-bas kontra kiralitets-bas för gamma-matriserna.)¹⁹.

Hur Higgs-fältet möjliggör kiral koppling förklaras t.ex. på s.47-48 i Wells gratisbok [11]:

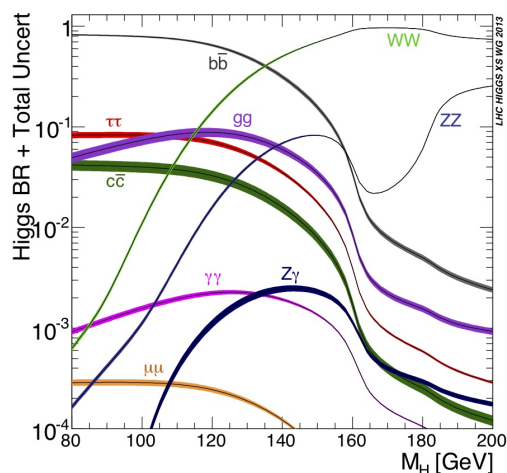
$$H\psi_L\psi_R, \quad H = (\bullet, \bullet) \quad (11.2)$$

om H har den angivna $SU(2)$ -representationen så Lagrange-funktionen är en $SU(2)$ -skalär. Om massan uppstår för att Higgs-fältet H får ett medelvärde, så är kopplingen till Higgs-partikeln proportionell mot massan för ψ . Masslösa partiklar som fotonen och gluonen kopplar alltså inte direkt till Higgs-partikeln.

Övre halvan av Feynman-diagrammet till höger representerar processen $H \rightarrow \gamma\gamma$ som Higgs-partikeln först upptäcktes genom. Den är ett exempel på hur allt här hänger ihop. Fotonen γ kopplar inte direkt till Higgs-partikeln H , men den kopplar till topp-kvarken t och anti-topp-kvarken \bar{t} , som i sin tur kopplar till Higgs-partikeln. Liknande för gluonen g : den finns inne i protonerna man faktiskt kolliderar vid CERN, men den är masslös liksom γ , så kopplar inte heller till H direkt, men väl till t . Så den totala processen $gg \rightarrow \gamma\gamma$ kan inträffa och har uppmätts, som i diagrammet nedan.



Standardmodellen har i och för sig många fria parametrar, men de flesta är subtila egenskaper som har ganska litet inflytande på grövre mätbara storheter. En viktig fri parameter fram till 2012 var massan hos Higgs-partikeln H . Figuren till höger visar teoretisk förutsägelse (fig. 2 i [18]) för en sorts mätning som görs i partikelaccelerator: Higgs-sönderfall till nio olika slutprodukter. Man anger hur många det blir av varje i procent, det kallas *gren-kvot* (*branching ratio*, BR), därför att Higgs-partikeln förgrenas till de nio slut-tillstånden. Grafen ges som funktion av en till att börja med okänd Higgs-massa. Alla gren-kvoterna har nu mätts och stämmer inom ca 20% för $M_H c^2 = 125$ GeV.



(Den tveksamma är den minsta, $\mu\mu$ i orange, så ignorera den.) Skalan på vertikala axeln är logaritmisk. Att en av dem stämmer är ett svagt villkor. Att åtta mätbara storheter som varierar över många storleksordningar alla skall stämma är ett ganska krävande test.



Du kanske har hört att W-bosonen verkar vara "för tung"? (Se t.ex. [artikel från maj 2022 i Physics Today](#).) Det är en intressant fråga, men ändå på ett sätt en liten detalj jämfört med det stora frågorna vi greppar med här.

12 BCS-teorin för supraledning

Kivelson säger "Standardmodellen är bara en omskrivning av teorin för supraledning". Låt oss studera det sambandet, dels för sambandet med det ovan, med likaväl med motiveringen att supraledning är ett viktigt och intressant fenomen i sig.

¹⁹Här behandlar jag kiralitet och helicitet som utbytbara, det är bara sant för masslösa partiklar, men vid accelerator-energi är elektron- och upp/ned-kvark-massor ofta försumbara.

Betrakta ett material. Atomerna sitter i gitter, så ersätt integral över rörelsemängd/vågtal med summa, normerad med volymen. Det behövs heller inte någon antipartikel, för energierna i material är bråkdel av elektronvolt, alldeles för små att skapa positroner (viloenergi 511 keV). Men vi kommer att se att det i ett medium finns en konceptuellt liknande excitering av elektronkvantfältet: elektronhål. Sätt kvantfältet för elektronen utan dess antipartikel som

$$\psi_s^+(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} c_s^+(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (12.1)$$

där $s = \uparrow, \downarrow$, och vi för tillfället inte poängterar en rumtidsbeskrivning, med bara 3-vektorer \vec{k} , inte 4-vektorer k^μ .

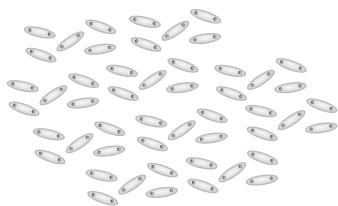
Det nya för en elektron som rör sig i ett gitter är att gittret kan svara på elektronladdningen. Det är en dynamisk effekt: när en elektron passerar ett visst område "dras gittret ihop" (deformeras) en aning kring elektronbanan. Om en annan elektron passerar genom samma område kort därefter så ger den tillfälligt ökade laddningstätheten en svag attraktiv kraft utöver den vanliga kraften från ett regelbundet gitter. Man kan betrakta det som att de två elektronerna attraherar varandra. Det är isåfall ett mer "avancerat" koncept av attraktion än en direkt "fundamental" kraft, det är en s.k. *retarderad* (fördröjd) effekt. Å ena sidan bör du redan vara bekant med fördröjda effekter i klassisk elektromagnetism, att elektromagnetiska vågor tar tid att komma fram. Men den här attraktionen mellan elektroner är ändå i grunden kvantfysisk, som vi kommer att se.

Notera att den här fysikaliska effekten helt försummas om man betraktar elektronen som en testpartikel utan eget elektriskt fält. Testpartikel-approximationen är pålitlig i makroskopisk fysik där elektriska fältet från en enstaka elektron är totalt försumbart jämfört med fält vi slår på i laboratoriet: förhållandet är Avogadros tal. Men i mikroskopisk fysik, om vi fokuserar på elektriska fältet från några enstaka joner, är det inte så självklart. Standard-kvantelektrodynamik är en taylorutveckling kring noll elektronladdning, som gör att man kan börja tro att det alltid är en bra approximation att elektronen producerar ett försumbart eget fält. Det här förklarar delvis varför det gick 46 år mellan Onnes upptäckt av supraledning 1911 och BCS-teori 1957.

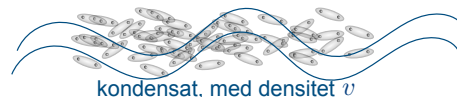
Ett par av elektroner, med steg-operatorer $c_{\downarrow}^+(\vec{k})c_{\uparrow}^+(-\vec{k})$ (om totala rörelsemängden är noll, eller i alla fall liten) som attraheras av varandra på det här sättet kallas Cooper-par. En viktig insikt är att två elektroner tillsammans är en boson, och kan alltså kondensera. Det klassiska medelvärdet är:

$$\phi = -g_0 \int_{\epsilon(\vec{k}) < \omega_D} d^3k \langle c_{\downarrow}^-(\vec{k})c_{\uparrow}^-(\vec{k}) \rangle \quad (12.2)$$

(volymen tar ut sig), där Debye-frekvensen ω_D är en övre energigräns som karaktäriserar hur gittret av joner kan deformeras. Konventionellt $\phi = \phi_1 - i\phi_2$. BCS-teorin kommer att möjliggöra att räkna ut värdet på ϕ . Här är en liten ritning för att få känsla:



gas av Cooper-par: svaga van-der-Waals-krafter



kondensat, med densitet ν
vätska av Cooper-par: svaga van-der-Waals-krafter

Det är kondensatet av Cooper-par som utgör mediet för strömmen i supraledning. Ett Cooper-par kan "bubbla upp" ur kondensatet ("skapas", om vi betraktar det som en excitering relativt mediet som referensnivå) eller "spricka" ("förintas", men elektronerna i paret försvinner inte, det är bara exciteringen som försvinner, som en såpbubbla spricker utan att såpan försvinner). Vi skriver nu en tvåkomponent-spinor (kallas Nambu-Gorkov-spinor efter de som kom på den):

$$\psi^-(\vec{k}) = \begin{pmatrix} c_{\uparrow}^-(\vec{k}) \\ c_{\downarrow}^+(-\vec{k}) \end{pmatrix} \leftarrow \text{elektronhål} \quad (12.3)$$

där nedre komponenten kallas "elektronhål" i analogi med halvledare, men glöm inte bort att vi pratar om metaller som kvicksilver eller aluminium, inte halvledare som kisel. (Kanske passande med tanke på att Bardeen fick nobelpris även för transistorerna.)

Komponenterna i Nambu-Gorkov-spinorn sägs vara i "laddnings-rummet" (*charge space*), det är inte spinn som i upp/ned. Det kallas också "isospinn", i analogi med svagt isospinn för svag växelverkan, där vänsterhänta elektronen som sagt är en 2-komponent-spinor, utöver att elektronen har spinn upp/ned.

Det är lite godtyckligt att skriva $\psi^-(\vec{k})$ (steg ned), för övre komponenten är steg ned, men undre är steg upp (för hål). Men vi gjorde likande (fast tvärtom) för elektron-quantfältet förut, det är bara en konvention, som att kalla quantfältet som skapar elektroner och positroner för "elektron-quantfältet".

Uttryckt i elektronfältet $\psi(\vec{k})$ och kondensatet ϕ är Hamilton-operatören för BCS-teori (Coleman ekv. (14.65)):

$$H = \sum_{\vec{k}} \psi^\dagger(\vec{k}) (h_i(\vec{k}) \sigma_i) \psi(\vec{k}) + \frac{V}{g_0} \bar{\phi} \phi \quad (12.4)$$

där $\vec{\sigma}$ är vektorn av Pauli-matriser (jämför att koppla elektron och foton i QED med gamma-matriser), och \vec{h} är ett Weiss-bakgrundsfält:

$$h_i(\vec{k}) = (\phi_1, \phi_2, \epsilon(\vec{k})) \quad i = 1, 2, 3. \quad (12.5)$$

Om du har läst statistisk fysik kan du se liknelsen från Weiss-fältet till medelfältet B_{eff} som används i spinnkedjor (det ursprungliga fältet som Weiss pratade om). De icke-diagonala komponenterna i ekv. (12.4) syns tydligare om vi skriver ut matrisen $h_i \sigma_i$, där jag har undertryckt summatecknet:

$$h_i(\vec{k}) \sigma_i = h_1 \sigma_1 + h_2 \sigma_2 + h_3 \sigma_3 = \begin{pmatrix} \epsilon(\vec{k}) & \phi \\ \bar{\phi} & -\epsilon(\vec{k}) \end{pmatrix} \quad (12.6)$$

(snabb övning: slå upp Pauli-matriserna $\sigma_1 = \sigma_x$ osv. och kolla att du håller med), så att Hamilton-operatören ekv. (12.4) utskrivna är

$$H = \left(\sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \epsilon(\vec{k}) c_\sigma^\dagger(\vec{k}) c_\sigma(\vec{k}) \right) + \bar{\phi} c_\downarrow(-\vec{k}) c_\uparrow(\vec{k}) + \phi c_\uparrow^\dagger(\vec{k}) c_\downarrow^\dagger(-\vec{k}) + \frac{V}{g_0} \bar{\phi} \phi. \quad (12.7)$$

Termen i parentesen är som kinetiska termen i Dirac-ekvationen. Andra och tredje termerna, som har c med $--$ och $++$, kallas "par"-termer (*pairing*).

Att skapa en kvasipartikel kostar energi som är egenvärden av $h_i \sigma_i$ i ekv. (12.6):

$$E(\vec{k}) = \sqrt{\epsilon(\vec{k})^2 + |\phi|^2}. \quad (12.8)$$

Operatören $\psi^\dagger(\vec{k}) \sigma_3 \psi(\vec{k})$ går att uttrycka snyggt i taloperatören:

$$\psi^\dagger(\vec{k}) \sigma_3 \psi(\vec{k}) = c_\uparrow^\dagger(\vec{k}) c_\uparrow(\vec{k}) - c_\downarrow^\dagger(-\vec{k}) c_\downarrow(-\vec{k}) = n_\uparrow(\vec{k}) + n_\downarrow(-\vec{k}) - 1 \quad (12.9)$$

så om $\psi^\dagger(\vec{k}) \sigma_3 \psi(\vec{k})$ har egenvärde "upp" (+1) motsvarar det $n_\uparrow + n_\downarrow = 2$, alltså tillståndet är $|2\rangle$ (ett par), om det är "ner" (-1) motsvarar det $n_\uparrow + n_\downarrow = 0$, alltså är tillståndet då $|0\rangle$.

Ett allmänt tillstånd är någonstans däremellan. Definiera vinkel

$$\cos \theta(\vec{k}) = \frac{\epsilon(\vec{k})}{E(\vec{k})} \quad (12.10)$$

och sätt $\phi_2 = 0$. Det smarta med det här är att vi då kan använda intuition från klassisk statistisk fysik, där magnetiseringen i ett spinnsystem i sitt grundtillstånd pekar utmed fältet. Liknelsen här

är att i grundtillståndet pekar isospinnet utmed minus Weiss-fältet. Från det är nästa övning att nå BCS-gap-ekvationen

$$\phi = g_0 \int_{\epsilon(\vec{k}) < \omega_D} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\phi}{2\sqrt{\epsilon(\vec{k})^2 + \phi^2}} \quad (12.11)$$

som är en implicit ekvation för ϕ , som bestämmer energigapet i supralederen.

Övning 11: Argumentera fram till ekv. (12.11) utifrån energin ekv. (12.8) och vinkeln ekv. (12.10).

BCS-gap-ekvationen (12.11) är en implicit ekvation. Om ϕ är oberoende av \vec{k} kan vi börja med att flytta ut ϕ ur integralen och stryka från bägge sidorna. Skriv om vågtals-integralen som en energi-integral med hjälp av tillståndstätheten $N(\epsilon)$. Som approximation kan vi sedan skriva

$$1 = g_0 N(0) \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\epsilon \frac{1}{2\sqrt{\epsilon^2 + \phi^2}} = g_0 N(0) \operatorname{arcsinh} \frac{\omega_D}{\phi} \approx g_0 N(0) \ln \frac{2\omega_D}{\phi} \quad (12.12)$$

Övning 12: Visa ekv. (12.12) från (12.11) och räkna ut gapet ϕ för niob och aluminium.

BCS-grundtillståndet $|\text{BCS}\rangle$ är inte alls vakuum, utan ett koherent tillstånd av Cooper-par:

$$|\text{BCS}\rangle = \sum_n \frac{1}{n!} |n\rangle. \quad (12.13)$$

Gaugetransformationen $c_\sigma^\pm(\vec{k}) \rightarrow e^{i\alpha} c_\sigma^\pm(\vec{k})$ transformerar fasen hos kondensatet: $\Delta \rightarrow e^{2i\alpha} \Delta$. Fysikaliskt är det för att kondensatet har elektrisk laddning: varje Cooper-par har $2e$.

Övning 13: Visa att taloperatorn N på ekv. (12.13) kan skrivas som derivata m.a.p. fasen α .

I grundläggande kvantmekanik kan vi representera x och p som multiplikation och derivata. Det leder till obestämdhetsrelationen. På samma sätt leder den här övningen till en obestämdhetsrelation för antal partiklar och fasen hos kondensatet:

$$\Delta\alpha \Delta N \geq 1. \quad (12.14)$$

Vi kan betrakta ϕ som medelvärde av ett kvantfält som kopplar till elektromagnetism, men det är enbart i 3-komponenten (longitudinella i laddningsrummet) som kopplar till elektromagnetism. I BCS-teori blir fotonen massiv och $U(1)$ är inte manifest. (Se även Sergejs artikel, nov 2022.) Massan manifesterar sig som penetreringslängden för magnetfält i en typ-II-supraleddare. Är den kort så uppstår Meissner-effekten.

Ett test av BCS var 1960 av norrmannen Ivar Giaever (nobelpris 1973, med Josephson), som mätte tillståndstätheten för kvasipartiklar. De är inte Cooper-par, utan man diagonaliserar Hamiltonianen, med en s.k. Bogoliubov-transformation $\psi = Ua$. Den beskrivs ganska väl på [Wikipedia](#). Antikommuterings-algebran är oförändrad. Förut kunde vi tänka på Nambu-Gorkov-spinorn abstrakt, att den bara sammanfattade elektroner och elektronhål. Men de nya egentillstånden är varken elektron eller elektronhål, utan neutrala fermioner, *bogoloner*.

Det är viktigt att grundtillståndet i BCS-teori inte är perturbativt relaterat till det ursprungliga vakuum. I kvantelektrodynamik är det här inget problem: vakuum är ungefär som det utan växelverkan men lite blandning av virtuella elektron-positron-par. I starkt växelverkande teorier som BCS är vakuomet man verkligen arbetar med nästintill oigenkännligt jämfört med det fria vakuomet. Det vakuum som bogolonerna är exciteringar av är inte det som elektronerna är exciteringar av. Ytterst säger Bogoliubov-transformationen vad "vakuum" betyder.

Det finns en koppling mellan Heisenbergs S-matris och Bogoliubov-transformationen. Det är definitivt inte samma sak, eftersom S-matrisen är unitär och Bogoliubov-transformationen inte är unitär i vanlig bemärkelse. Men Bogoliubov-transformationen kan betraktas som $SU(1,1)$, som är "unitär fast med Lorentz-signatur". Så det är som att kalla en boost en pseudo-rotation (se t.ex. Schutz relativitetsteoribok): det är ingen rotation, men det skiljer sig bara med ett tecken.

13 Supraledare och svarta hål

Det allmänna påståendet är lika relevant i Unruh-effekten och Hawking-strålning: en accelererande observatör, oavsett om accelerationen är på grund av gravitation eller ej, mäter ett annat antal partiklar än en som är stilla. Så vad som är vakuum är inte automatiskt invariant. Vi kan säkerställa invarians under t.ex. Lorentz-transformationer, men de har konstant hastighet och är inte ett effektivt sätt att beskriva accelererad rörelse. (Man kan beskriva accelererad rörelse som en sekvens av rörelse med olika konstanta hastigheter, men det är som att diskutera hastighet utan att få använda derivata.)

14 Fördjupning 1: renormerbarhet (*renormalizability*)

Kvantfysik leder till indirekta växelverkans-sätt, t.ex. att fotoner indirekt växelverkar med varandra trots att de är neutrala, genom att producera elektron-positron-par. Renormerbar är att all växelverkan till given noggrannhet redan ingår i listan av direkt växelverkan, så att kvanteffekter på sin höjd ändrar koefficienten framför.

Ett konkret exempel är att elektromagnetiska vågor inte växelverkar med varandra (i vakuum) enligt klassisk elektromagnetism. Det finns s.k. ickelinjär optik som beskriver hur en elektromagnetisk våg kan delas upp i två med en ickelinjär kristall. Men det kan alltså inte ske i vakuum, enligt klassisk fysik.

Enligt kvantfysik kan det ske i vakuum. Den som först räknade ut det var Heisenberg, med en ung assistent Hans Euler (inte Leonhard Euler!):

$$\mathcal{L}_{EH} = F^4 \quad (14.1)$$

Det kallas spridning av ljus mot ljus (*scattering of light by light*). En av de första uträkningarna med Feynman-diagram var att göra om Heisenbergs och Eulers uträkning, fast mer effektivt. (Det beskrivs av Dyson på webofstories.org.)

Det är fortfarande inte enkelt, men Mathematica-paketet [Package X](#) klarar det. Med koden till höger (och lite initiala uträkningar som står på den webbsidan) räknar paketet ut att differentiella tvärsnittet

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{\alpha^4 \omega^6}{m^8} (3 + \cos^2 \theta)^2. \quad (14.2)$$

Kan du argumentera dig fram till faktor $\alpha^4 \omega^6 / m^8$ från kvantfältteori? För att få vinkelberoendet vet jag inget billigt argument.

(Sidokommentar: tyvärr håller just paketet "PackageX" ovan precis nu 2022 att hamna utan vidareutvecklare, som ofta händer med liknande en-persons-projekt. Men Jim Simons har ett [helt institut](#) för att hantera sådana situationer.)

Om växelverkan av fotoner med varandra produceras av kvantfysik, borde vi inte ha tagit med det från första början i verkan S_{EM} ? I princip ja. Men om vi studerar energier och intensiteter långt under dem så är $\mathcal{L}_{EH} \ll \mathcal{L}_{EM}$ en bra approximation. Det blir samma "effekt" om vi bara approximerar bort \mathcal{L}_{EH} . Det kallas "effektiv fältteori".

Folk trodde först inte att Standardmodellen var renormerbar. Det visade 't Hooft. Idag kan vi förstå det (Schwarz kap. 28.4) som att Higgs-fältet självt är resultatet av en speciell sorts symmetribrott som beskrivs av en linjär teori ("sigmamodell"), inte en ickelinjär som för andra symmetribrott (t.ex. symmetrin mellan kvarkmassorna).

Nu kan vi knyta ihop en historisk lös tråd. Fermi skapade en teori med fyra fermioner $\psi\psi\psi\psi$. Den har mass-dimension $4 \cdot 3/2 = 6$, så den verkar inte renormerbar. Elektrosvaga teorin "löser upp"

```
In[26]:= dσdΩLE[α_, s_, t_] = 1/2s ampSqLE 1/32 π² / . e → √4 π
Out[26]= 139 (s² + st + t²)² α⁴ / 129600 m⁸ π² s

In[27]:= (*In the center-of-mass frame,
ω=Angular frequency of each incident photon,
θ=COM scattering angle *)
% /. t → -1/2s Kallenλ[0, 0, s] (1 - Cos[θ]) / . s → 4 ω² // FactorSquareFree
Out[27]= 139 α⁴ ω⁶ (3 + Cos[θ]²)² / 32400 m⁸ π²
```


Fermis växelverkan till utbyte av en W - (eller Z -)boson, vardera med en renormerbar växelverkan. I experiment vid låg energi märks inte den tunga W -partikeln, och Fermis växelverkan är en god approximation.

Witten (eller "Ed" som vi kärleksfullt säger) har som upplägg i sitt föredrag att ge personliga kommentarer och ibland kritik till tre föredrag av Weinberg:

- Weinbergs nobelföreläsning, 1979
- "Vad är kvantfältteori och vad trodde vi att det var?", 1997
- "Ett halvsekel med standardmodellen", 2018

och utifrån dem analysera Weinbergs egen utveckling i sin syn på kvantfältteori 1979 → 1997 → 2018. Eds föredrag visar att Weinbergs syn har utvecklats ganska drastiskt bort ifrån den Weinbergs generation ärvde av giganterna (Heisenberg, Fermi, Dirac. etc) på 1950/60-talen. Till exempel betraktar Weinberg 1979 renormerbarhet som en grundläggande princip, men från 1997 som en approximation, eller t.o.m. en icke-fråga: mantrat "icke-renormerbara teorier är renormerbara". (Det mantrat såg jag först i hans lärobok när den kom ut 1996.) Weinberg är först på 1990-talet redo att uttryckligen säga emot felsteg som togs av generationen innan, specifikt Oppenheimer och Dirac.

14.1 Fördjupning 2: Kluster-sönderläggning (*cluster decomposition*)

Med "kluster" menas här vanligen alla partiklar som skickas in i ett experiment, medan ett annat kluster skickas in i ett annat experiment någon annanstans. Ed förklarar sönderläggning av kluster som att "experiment vi gör här inte påverkar experimentupplägg i en annan galax" (eller mer konkret på CERN och Fermilab). Det utesluter EPR-paradox och Everett-telefoner. Det Weinberg visar i sin bok är att sättet vi vanligtvis räknar ut saker på uppfyller kluster-sönderläggning. Men det är mer ett praktiskt antagande än en princip.

Mer specifikt, Weinberg visar att om vakuum är blandat tillstånd (som det är om det är snärjt med något någon annanstans) så funkar inte klustersönderläggning, vilket även står sammanfattat på [Wikipedia](#). Det kan verka oviktigt om vakuum självt är blandat, men tanken är att man bygger upp inskickade partiklarna som steg-upp-operatorer på vakuum. Men om vakuum självt är ett rent tillstånd, men in-tillståndet är ett snärjt tillstånd, tror jag klustersönderläggning också går åt skogen, det är bara det att partikelfysikexperiment sällan ställer såpass finkänsliga frågor.²⁰

Det handlar egentligen om övergången mellan det partikelfysiker skickar in i spridnings-experiment och vilka processer som "egentligen sker" på mycket korta avstånd. I synnerhet virtuella processer, där vi inte mäter vad som exakt har hänt, kallade Pauli *mörk punkt*, idag "växelverkansregion". Ett problem med det begreppet, som förvirrade de tidiga forskarna, är att t.ex. elektromagnetisk kraft har oändlig räckvidd. Att växelverkan bara sker i en begränsad region kan därför som bäst vara en approximation. Men i de ursprungliga teorierna fanns inget sätt att formulera vad den (som alla approximationer) isåfall har för giltighetsområde. Det systematiska sättet att formulera det som en approximation är just effektiv fältteori.

Det är instruktivt att backa tillbaka till spridningsteori i solsystemet. En viktig del av den frågan förekommer redan där (utom kvantfysik-biten, förstås). Om en komet kommer nära solen så böjs den av under månaderna den passerar nära solen. Sedan åker den nästan rakt bort. Men varför kommer kometen isåfall tillbaka?

De kometer vi ser, som Halleys, är gravitationellt bundna till solen²¹. Men det går att approximativt analysera banan som att den bara är bunden de månader den är nära solen, sedan fri. Den approximationen blir dålig över lång tid, då den svaga kraften från solen på långt avstånd ändå ändrar banan ordentligt. Astronomer kan kvantifiera när det inträffar ([sekulär störning](#)), men utan

²⁰Weinbergs motivering handlar mer om motsatta frågan, huruvida klustersönderläggning implicerar kvantfältteori [8]

²¹Astronomer har såvitt vi vet bara sett ett enda objekt som tros inte vara gravitationellt bundet till solen. Det betyder förstås inte att det är något särskilt ovanligt i sig med sådana objekt, det mesta av galaxen vet ingenting om vår sol, bara att vi inte ser dem så ofta här i grannskapet, eftersom vi bara får en chans!

uträkning kan vi intuitivt säga att det för t.ex. Halleys komet är flera år och inte månader.

Kvantfysik gör sedan frågan lite mer komplicerad, och intressant. Om vi skickar in partiklar som får växelverka och är snärjda? Ett bra exempel på det är Schwartz S-matris, med tre regioner: långt bort, mycket nära, och mittemellan. Formellt utvidgar Schwartz tiden till att när man kommit till $t = +\infty$ så går man "runt hela vägen" till $t = -\infty$.²² Det gör det mer intuitivt att man i praktiken jämför vid $t = 0$. I mittemellan får partiklarna explicit utvecklas till växelverkande partiklar innan de når växelverkansregionen. Klustersönderläggning gäller då bara längst bort, inte mittemellan. I synnerhet kan partiklarna interferera innan kollision, och det visar sig lösa vissa annars förvirrande situationer. Eftersom klustersönderläggning fortfarande gäller längst ut är det fortfarande inget problem med interferens mellan CERN och Fermilab: alla gamla uträkningar stämmer som approximationer, men nu är approximationen kontrollerad, och nya sorters fenomen går att undersöka kvantitativt.

En del forskare, som Strominger, påstår också att det här löser djupa frågor som informationsparadoxen för svarta hål. Uttryckt i Schwartz formulering så kanske Hawking missade information för att han inte tittade "mittemellan".

A Några resurser

Eftersom Weinberg under de här decennierna i mångt och mycket dikterade hela forskarsamhällets syn (på bred front genom forskningartiklar, läroböcker [6] och populärvetenskap [7]) kan man påstå att det faktiskt lika drastiskt har ändrat det pedagogiska läget vad som är viktigt att poängtera i min kurs.

Jag är nyfiken hur mycket en typisk intressent skulle hänga med på av Wittens föredrag redan nu. Så börja med det, så benar vi ut det som behövs.

B Vad finns redan om kvantfältteori på "rätt" nivå?

- Sean Carroll har försökt länge men lyckas inte tycker jag.

Jag tror helt enkelt Carroll inte förstår kvantfältteori tillräckligt bra själv! Han har artiklar som [16]. Det enda han får fram som är riktigt bra tycker jag är att påståendet att det är irriterande att man måste läsa fem år fysik på universitet innan någon talar om svaret på frågan "partiklar eller fält?", och att det då plötsligt inte finns några tvivel: svaret är fält!

- David Tong i Cambridge (som definitivt förstår kvantfältteori bättre än jag) är en yngre förmåga som har börjat försöka och det går lite bättre, t.ex. [Tong om Standardmodellen](#).
- Stanford-encyklopedin i filosofi [17] är en bra källa, men det blir ofta tekniskt på ett annat sätt: filosofi-ord.

På den länken [17] står t.ex. "*Quantum field theory taken seriously in its metaphysical implications seems to give a picture of the world which is at variance with central classical conceptions of particles and fields, and even with some features of quantum mechanics.*". Visst, det kan vara subtilt. Men jag tycker per definition inte kvantfältteori kan stå emot kvantmekanik, när det är grundat på det. Hela texten är lite åt det hållet, att den från mitt perspektiv överdriver det som är oklart.

Nima Arkani-Hamed, i sitt föredrag efter Witten, tar upp lite nyare frågeställningar, från de senaste 20 åren, t.ex.

²²Det här låter lite som Riemann-sfären i komplex-analys, men notera att det där inte är någon väsentlig skillnad på nordpol och sydpol. Här finns det en s.k. foliering i tid (tidsriktningen är inte godtycklig), så det är mer som två ihopkopplade Penrose-diagram.

- kvantfältteori för **masslösa** partiklar

Witten tar också upp det, och Arkani-Hamed menar att det har skett konceptuella framsteg, t.ex. genom den s.k. **helicitets**-formalismen, som bygger in masslöshet från grunden. Se även [Schwartz](#)

- kvantmekaniska spridningsamplituder för **gravitoner** är **kvadraten** på de för gluoner ("KLT").

Även om frågorna i Wittens föredrag ovan är lika relevanta idag så anses många som väsentligen "lösta". De här två som Arkani-Hamed tar upp är relativt "nya" (med vilket jag menar att de har fått ny eller förnyad uppmärksamhet sista 20 åren) och väsentligen inte "färdiga". Vilket leder till att jag själv har kunnat vara med i den utvecklingen – Arkani-Hamed är ett år äldre än vad jag är. Jag studerade t.ex. KLT i [12] (se även en nyare artikel [13]). Det är förstås roligt för mig att prata om det som direkt relaterar till min forskning. Men det är viktigare, tror jag, att fånga upp det som redan är känt i gapet mellan Feynman och Arkani-Hamed, än att stressa fram till forskningsfronten idag. Det som redan är känt representeras tidsmässigt av Weinberg och Witten. Jag kan avsluta med ett citat av Feynman:

"People are always asking for the latest developments [...], and they don't give us a chance to tell them anything about what we know pretty well. They always want to know the things we don't know". [1]

References

- [1] R.Feynman, "*QED: The Strange Theory of Light and Matter*" (1985). En kollega till Feynman skrev ihop den från videor av ursprungliga föreläsningarna från 1979. De finns nu öppet på [Vega Science](#).
- [2] McMahon, "*Quantum field theory demystified*", [Bokus](#). Har många fel, t.ex. deltafunktionen är inte 1 (s.152).
- [3] A. Zee, "*Quantum Field Theory in a Nutshell*" (2010), Princeton. Det här är en lite speciell bok. Den går in på djupa detaljer, men är samtidigt avslappnad i texten, och kortare än de flesta liknande böcker. Zee tar också upp några mer moderna aspekter av kvantfältteori. Boken kom ut långt efter jag hade gått forskarutbildning, så det är svårt för mig att bedöma hur den är att lära sig ur från scratch.
- [4] M. D. Schwartz, "*Quantum Field Theory and the Standard Model*" (2014), Cambridge University Press, ISBN 978-1-107-03473-0. Den här kom liksom Zees bok ut långt efter jag hade gått forskarutbildning. Det här är lite av en "ny standard", jag vet flera lärare som har börjat använda den. Den är lik Zee i att den så att säga "medvetet" tar sig an lite nyare metoder som utvecklats sista 20 åren.
- [5] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, "*An Introduction to quantum field theory*" (1995) Addison-Wesley, ISBN 978-0-201-50397-5. Det här är boken jag lärde mig ur, samtidigt som Weinbergs bok (se nedan). Den är definitivt mer lättsmält än Weinberg, och ibland ganska originell, men kanske lite väl smal (specifik till partikelfysik) för dagens perspektiv.
- [6] S.Weinberg, "*The Quantum Theory of Fields*" (1996), 3 volymer. Det här tunga verket kom ut precis när jag försökte förstå kvantfältteori för första gången. Folk säger att det är alldeles för svårt och omfattande för att utgöra en bra början. Jag har inget att jämföra med, men jag tycker nog det var en ganska bra början! Mellan de långa ekvationerna kommer texter som är ytterst insiktsfulla.
- [7] S.Weinberg, "*Dreams of a Final Theory*" (1992). Det här är nog min favoritbok inom populärvetenskap överhuvudtaget. Men den fyller inte samma funktion för modern kvantfältteori som Feynmans QED gjorde för kvantelektrodynamik. Kanske kommer någon att skriva ihop en postum bok utifrån Weinbergs videoföreläsningar som [CERN 2009](#). Weinberg är å andra sidan inte alls som Feynman som talare, förstås.
- [8] S.Weinberg, "*What is Quantum Field Theory, and What Did We Think It Is?*" (1996), [arXiv-länk](#)
- [9] S.Weinberg, "*Lectures on Quantum Mechanics*" (2015), [länk](#).
- [10] L.Susskind, A.Friedman, "*Theoretical Minimum: Quantum Mechanics*" (2015), Penguin Books, [länk](#).
- [11] J. D. Wells, "*Effective theories in physics: From planetary orbits to elementary particle masses*" (2012) Springer. Den här finns som PDF lagligt och gratis på [SCOAP Books](#).
- [12] M. Berg, I. Buchberger and O. Schlotterer, "*From maximal to minimal supersymmetry in string loop amplitudes*" (2017) *Journal of High Energy Physics* **04**, s. 163 [[arXiv:1603.05262](#) [hep-th]].
- [13] S. Stieberger, "*Open & Closed vs. Pure Open String One-Loop Amplitudes*" (2021) [[arXiv:2105.06888](#) [hep-th]].
- [14] Pluggakuten, "*Hur förmedlar bosoner krafter?*" (2020), diskussionstråd, [länk](#).

- [15] R.Eagle (“DrPhysicsA”), “*Exchange Particles and Feynman Diagrams*” [videolänk](#). Tydligt är det “A level physics” i England, en gymnasieform.
- [16] S. M. Carroll, “*The Quantum Field Theory on Which the Everyday World Supervenes*”, [arXiv:2101.07884 [physics.hist-ph]]. Jag tror Carroll vill pracka på andra fysiker ordet “supervene”, så han har det i titeln.
- [17] M. Kuhlmann, “*Quantum Field Theory*”, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (2020), Edward N. Zalta (ed.), plato.stanford.edu/entries/quantum-field-theory. Inte så bra, just den här sidan.
- [18] S. Heinemeyer *et al.* [LHC Higgs Cross Section Working Group], “*Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 3. Higgs Properties*”, [arXiv:1307.1347 [hep-ph]].
- [19] M. Born, “The Statistical Interpretations of Quantum Mechanics”, Nobel Lecture (1954), [link to PDF](#)
- [20] P.Krantz *et al.*, [1904.06560](#).
- [21] D.Cassidy, “Beyond Uncertainty” (2010), Bellevue Press, [länk](#)
- [22] Stanford Encyclopedia of Philosophy, “*Uncertainty Relation or Uncertainty Principle?*” (2016), av J. Hilgevoord, J. Uffink.
- [23] P. Cartier, C. DeWitt-Morette, “*Functional Integration*” (2010), Cambridge University Press, [Länk](#).
Jag tror inte den här boken passar någon student här att studera ur, men den är trevlig att bläddra i.