

Anteckningar om medicinsk strålningsfysik, v0.6

1 Referenser

Berglund-Jönsson och Isaksson är relativt kortfattade svenska böcker [2, 3]. Bushberg et al [1] är en mer omfattande amerikansk bok, som är min huvudreferens här. Några webbresurser är [Radiopædia](#) (notera stavningen) och röntgen-databasen [XCOM](#) på NIST.

2 Introduktion

Här är en kort lista på grundkunskaper som behövs för att läsa t.ex. Bushberg.

- **Vävnad** är *tissue* på engelska, betecknas därför T .
- En **radiolog** är en läkare.
- **Absorberad dos av joniserande strålning** $D_{T,R}$ mäts i enheten **gray** = J/kg. Den är uppkallad efter den engelske fysikern L.H.Gray som grundade fältet **radiobiologi**.
- Enheten **sievert**¹ utgår från enheten gray och bakar in det jag skulle kalla *fenomenologiska faktorer*, dimensionlösa siffror W som karaktäriserar en viss situation men inte går att härleda från grundprinciper. Kalla strålningstypen R och vävnadstypen T . Då har vi:
- **“ekvivalent” dos** $H_T = \sum_R W_R D_{T,R}$ kontra viss vävnad T . Sedan om vi lägger ihop ekvivalenta dosen för alla typer av vävnad får vi:
- **“effektiv” dos** $E = \sum_T W_T H_T$ i sievert, Sv. Så antal sievert sätts ihop av olika värden mätta i gray. Exempel på gränsvärden i sievert finns på [Strålsäkerhetsmyndigheten](#), samma som ansvarar för kärnkrafts-säkerhet. De har en interaktiv “doskatalog”. För att sammanfatta: effektiv dos mäts i sievert och ges av

$$E = \sum_T W_T \sum_R W_R D_{T,R}$$

där $D_{T,R}$ är absorberad dos av joniserande strålning för vävnadstyp T och strålningstyp R .

- **Kerma**, frisläppt rörelseenergi per massenhet från joniserande strålning, är också värt att läsa mer om tidigt, för orientering.

När man först ser de här koncepten kan man t.ex. undra: varför är det användbart att införa en ny enhet för något så enkelt som J/kg och kalla den gray? För att sätta det i perspektiv kan man ställa en motfråga: varför inför vi en ny enhet för kg·m/s² och kallar den newton? I grundläggande fysikkurser diskuterar vi sällan ekvivalent dos eller kerma i detalj eftersom de beror på tillämpningen, här radiobiologi. Som man ser i tabellerna i länkarna ovan ändras värdena allteftersom olika rekommendationer ändras, delvis utifrån större förståelse av biologiska/medicinska effekter. Det gör inte sådana storheter mindre viktiga i den här tillämpningen, men det förklarar varför de inte används så mycket i grundläggande fysikkurser.

- **Röntgendiagnostik**. Skolbarn som kommer på besök på sjukhuset kan få titta på röntgenbilder och faktiskt observera att man ser att t.ex. ett ben är brutet. Så principiellt vet du redan varför röntgen är användbart. **Övning**: Man hör ibland att anledningen att röntgenstrålar visar ben men lyser igenom vävnad (eng. *tissue*, alltså organ osv.) är att ben har “högre densitet”, alltså massdensitet ρ . Bushberg uttrycker det inte i ρ utan i – vad?

¹[Rolf Sievert](#) var svensk, och arbetade på Radiumhemmet. Det är fascinerande (och stundtals skrämmande) att läsa igenom listan på Wikipedia-sidan om enheten sievert, som ger stråldoser (i gray!) i kända olyckor. Men mycket av det handlar om stora kortvariga doser, inte små doser över lång tid. Det är en intressant fråga vad “lång” tid egentligen betyder, för en del processer i människokroppen händer ganska snabbt: att molekyllkedjor i en given cell i kroppen går av och sedan repareras (se [DNA-reparation](#)) händer runt 1 miljon gånger om dagen i varje cell, alltså runt en gång per 100 ms, under normala omständigheter utan strålning.

3 Strålning: grundläggande koncept

Våg-partikel-dualitet kommer redan på s. 18 i Bushberg. Det är väldigt konkret: **röntgenstrålar** är som bekant elektromagnetiska vågor med våglängd 0,01 till 10 nanometer (jfr. Cheng, kursbok i elektromagnetisk fältteori). Men vissa detektorer detekterar inte vågor utan partiklar, alltså fotoner (jfr. Inledande modern fysik, kvantfysik), då med motsvarande energi 100 eV till 100 keV. (Vi kommer inte att betrakta de lägre energierna här, utan fokusera på "hårda" röntgenstrålar, som betyder från och med kanske 10 keV.) Elektromagnetisk strålning beskrivs bäst som partiklar när det relevanta objektets dimension är mindre än våglängden. Att detektera fotoner är kanske mest bekant för gammastrålning, som har ännu mer energi än röntgenstrålning.²

Bushberg skiljer därför av praktiska skäl på elektromagnetisk strålning och partikelstrålning.³ Elektromagnetisk strålning betyder alltså här klassisk sådan, dvs. "vågor, motsatsen till partiklar (fotoner)".

Bushberg et al utgår från Bohr-modellen och ritat planetmodeller av atomer. Det kan vara lite förvirrande när man ofta hör fysiker kritisera planetmodeller för att de inte stämmer.⁴ Men jag tycker inte det skapar någon förvirring i Bushberg, när de säger tydligt efteråt vad de menar. Det är folk som inte kan någon kvantfysik som riskerar att missförstå. När Bushberg et al ritat planetbanor menar de alltså energinivåer i atomen.

3.1 Joniserande strålning

Det är en gråzon exakt vid vilken energi strålning skall räknas som joniserande, eftersom det beror på vilken typ av strålning det är och vilken atom som skall joniseras. Den joniseringsenergi man brukar minnas är den för väte — Rydberg-energin. **Övning:** minns du vad Rydberg-energin är?

Bushberg ger en tumregel (s. 22): 11 eV och uppåt, alltså "hårda" röntgenstrålar (se ovan). Vi kan räkna röntgenstrålar för diagnostik som 15 till 150 keV. (Röntgenstrålar för behandling i motsats till diagnostik har betydligt högre energi och kommer från en linjäraccelerator, inte bara ett röntgenrör som ovan. Det finns också sådan behandling i Karlstad.)

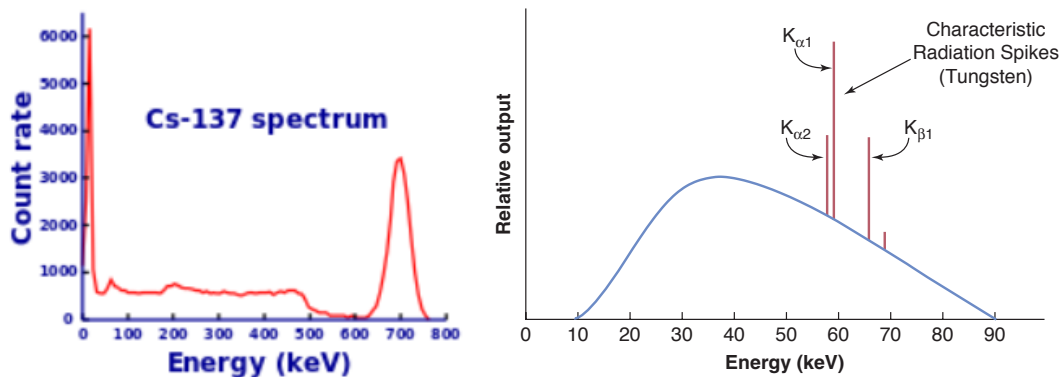
3.2 Källa

Konceptuellt lättaste sättet att producera fotoner i röntgendelen av elektromagnetiska spektrat är att ta ett radioaktivt preparat som röntgenkälla. Spektrat från cesium-137 är det till vänster (från Wikipedia):

²Det finns ingen precis uppdelning mellan röntgen och gamma i **elektromagnetiska spektrat**. Här kallar jag allt upp till flera hundra keV röntgenstrålar, och pratar inte så mycket om gammastrålning. Vill du slippa diskussionen, säg *fotoner*!

³De använder det ur fysiksynpunkt lite ovanliga adjektivet "*particulate*", som i "*particulate radiation*". Jag skulle ha skrivit "*particle radiation*". En annan terminologi som känns ovan är *negatron* för elektroner i betastrålning. Anderson försökte införa det på 1930-talet, och negatron är onokligen den logiska motsatsen till positron, men jag har aldrig hört ordet användas i partikelfysik.

⁴Som repetition av kvantfysik: problemet är inte att de inte följer några abstrakta kvant-tankar, problemet är att de inte stämmer med verkligheten! Om man tar bilderna bokstavligen, alltså laddade partiklar som går i banor kring atomen, skulle de enligt klassisk – och experimentellt väl fastlagd – elektromagnetism stråla ut elektromagnetiska vågor, tappa energi och snabbt falla in i atomkärnan. Det var ett stort problem i **Bohrs modell** från 1913, som Bohr själv förstod. Kvantfysik från 1925 enligt Heisenberg och Schrödinger beskriver hur det kan finnas stabila tillstånd för elektronerna i atomer. **Övning:** hur?



För att få mer kontroll tar man ett röntgenrör, som ger spektra som det till höger (fig. 6-5 i Bushberg): elektroner avges från en upphettad tråd av grundämnen wolfram (*tungsten* på engelska⁵), accelereras genom en spänningsskillnad på ett antal kilovolt, och slår in i wolfram. Fotoner genereras från bromsstrålning, se nedan. Några elektroner tar sig in i en wolfram-atom och exciterar atomens elektroner till högre skal, som mycket snabbt faller tillbaka till lägre skal och skickar ut fotoner. Den strålningen är karakteristisk för materialet (här wolfram).

Det är värt att titta lite på [Siemens webbform-spektra](#): spekrat från röntgenrör, och spekrat från röntgenrör med aluminium strax framför. Aluminiumet tar bort en del fotoner med lägre energi som ändå inte gör bildtagningen särskilt mycket bättre. Det gör att medelenergin blir högre och därmed också medelfrivägen (se nedan).

3.2.1 Bromsstrålning

Tyska ordet *Bremsstrahlung* används på engelska, och därför ibland också på svenska, men jag gillar svenska ordet bromsstrålning. Det inkluderar synkrotronstrålning (som är en huvudanledning att LHC på CERN kolliderar protoner och inte elektroner). Bromsstrålning finns i klassisk elektromagnetism och är ett av sätten som elektroner i klassiska Bohr-atommodellen skulle stråla ut energi och falla in i atomkärnan (se tidigare fotonot).

3.2.2 Bragg peak

Bragg peak är ett viktigt koncept. Figur 3-2. En av de första kvantfysiska uträkningarna av inbromsning av laddade partiklar från grundprinciper var [Bethe 1930](#) (vi har diskuterat andra aspekter av Hans Bethes⁶ arbete en hel del, bl.a. inom fusion, det här är en annan aspekt av det). Bethes uträkningar var de första och är konceptuellt och historiskt viktiga, men de ursprungliga formlerna fungerar inte så bra för de lätta elektronerna, där bromsstrålning är viktigt (se nedan).

3.3 Växelverkan i materia

3.3.1 Compton-spridning

Se min [video](#) från Inledande modern fysik. En *klassisk* elektromagnetisk våg har ett oscillerande elektrisk fält som accelererar en laddad partikel som en elektron fram och tillbaka: en dipolantenn (se Chengs bok), som skickar ut elektromagnetisk strålning med samma våglängd som den inkommande. Dipolantennen har ett karaktäristiskt riktningberoende: lika mycket elektromagnetisk strålning skickas ut bakåt som framåt, och lite mindre sprids vinkelrätt: [Thomson-spridning](#).

⁵från svenska "tung sten", det gamla namnet på mineraler som innehöll wolfram!

⁶Jag jobbade några månader om året på Cornell 2007-2011, några år efter Bethes död, och satt då på Bethes kontor. Kassaskåpet där han lämnade hemligstämplade uträkningar åt amerikanska militären stod kvar.

Som vi diskuterar i kvantfysik var Arthur Comptons poäng att om vi istället tänker på inkommande röntgenstråle som partiklar kan vi använda grundläggande mekanik: fotonen skulle kunna krocka med en elektron och överföra rörelsemängd [7]. Så observation av Compton-spridning var en tidig viktig indikation att fotonen uppför sig som en partikel med rörelsemängd, som genomgår inelastisk stöt, och röntgenstrålarna som kommer ut har tappat energi, dvs. har längre våglängd. I gränsen då stöten är elastisk övergår det till klassisk Thomson-spridning. Utmaningen att förstå Thomson-spridning är att den är både kvantfysisk (fotoner är partiklar) och kan vara relativistisk (elektronen kan få en ordentlig knuff så den åker med någon bråkdel av ljushastigheten: elektronens viloen energi är 511 keV så en typisk röntgen). Men det problemet löstes väsentligen på 1930-talet. (Mer detaljer i sektion 9.3.)

3.3.2 Fotoelektriska effekten

Det är värt att tänka igenom den ickeklassiska effekten att en foton absorberas helt, som alltså inte händer i klassisk fysik. Jag diskuterade det på Inledande modern fysik utifrån Matt Strasslers blogg, om två vågor A och B träffar varandra och ger en ny våg C: vad som händer [klassiskt](#) och [kvantfysiskt](#).

3.3.3 Parproduktion

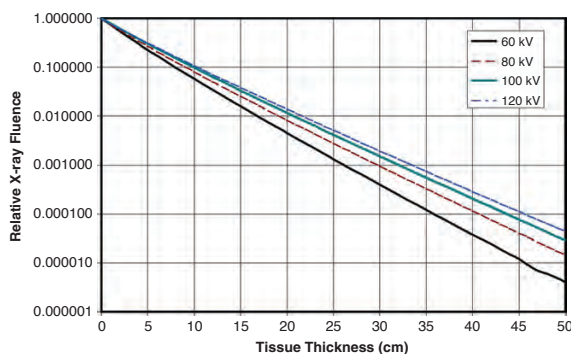
Bushberg (s.44) beskriver $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$. Tröskelenergin för parproduktion är naturligt nog dubbla elektronens massa i energiekvivalent, 1,02 MeV.

Övning: Är parproduktion relevant för röntgenstrålning? **Övning:** Beror tröskelenergin på referensramen? Jag kan ju sätta mig t.ex. i elektronens koordinatsystem och där står den stilla, bara positronen rör sig.

3.4 Attenuerings-koefficient μ

I ekvation (3-10) på s.51 relaterar Bushberg medelfrivägen ℓ till attenuerings-koefficienten μ och ytterligare ett koncept HVL (Half-value layer): $\ell = 1/\mu = 1,44$ HVL. Så man behöver bara ett av de tre koncepten ℓ , μ , HVL om man skulle vilja spara på koncept.

Övning: repetera uträkning av medelfriväg ℓ för gaspartiklar i en termos full med ideal gas (termo) och neutriner i bly (mod.fysik). I den senare uträkningen kommer även tvärsnitt σ in. Översätt till μ och HVL. Här är fig. 11-1 i Bushberg för attenuering i vävnad för olika röntgen-energies:



3.5 Spridningstvårsnitt σ

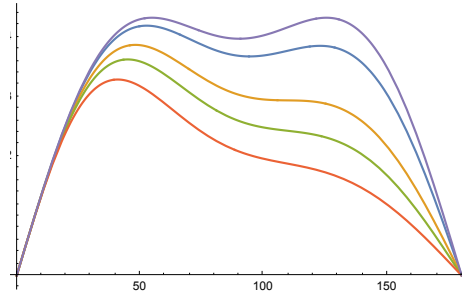
Figur 3-8 i Bushberg visar i praktiken differentiellt tvärsnitt $d\sigma/d\Omega$, som vi tar upp i analytisk mekanik och Inledande modern fysik.⁷ Här är [Klein och Nishinas](#) från 1929, som härleds t.ex. i kvantfält-

⁷En sak att komma ihåg är att rymdvinkel-intervallet är $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ (i steradianer, som bara betyder kvadratradianer, som meter och kvadratmeter), så att man måste ta med sinus-faktorn, vilket jag gör i första grafen. Ett annat sätt att säga

teoriboken Peskin & Schroeder:

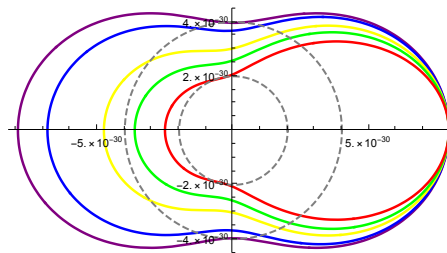
$$\frac{d\sigma_{\text{KN}}}{d\Omega} = \frac{1}{2}\alpha^2\lambda_e^2P^2 (P + P^{-1} - \sin^2\theta) \quad (1)$$

där $P = 1/(1+e_\gamma(1-\cos\theta))$ är förhållandet mellan fotonvåglängd efter och före, och $e_\gamma = E_\gamma/(m_e c^2)$. Jag plottar genast $d\sigma_{\text{KN}}/d\Omega$ för fyra olika energier (se senare sektioner) från min Mathematica-fil *jam-for_Thomson_KleinNishina.nb*, där den i lila är Thomson-spridning (klassisk elektromagnetism: spridning av elektromagnetisk våg från elektron som dipolantenn):



Det här är för 20, 80, 140 och 250 keV. Den viktiga parametern i (1) är tydligen förhållandet mellan inkommande fotonenergin E_γ och elektronens viloeenergi $m_e c^2$, alltså $e_\gamma = E_\gamma/(m_e c^2)$. När vi drar på mer spänning i röntgenröret och det dimensionslösa förhållandet e_γ börjar närma sig 1 (som vore fotonenergi 511 keV) är Thomson-spridning, som inte tar hänsyn till kvantfysik eller relativitetsteori, en dålig approximation. Som ju gör det mer intressant! Klein-Nishinas uträknade formel för $d\sigma/d\theta$ tar hänsyn till både kvantfysik och relativitetsteori, men har ändå lång väg till riktiga tvärsnitt av intresse i medicinsk fysik, se nedan.

Man kan också göra en polär graf som visar i vinkelriktning hur mycket som sprids:



Thomson ger tydligen ungefär $\sigma = 8 \cdot 10^{-30} \text{ m}^2$ per steradian-intervall både rakt fram och rakt bakåt, och halva det vid 90 grader. Det motsvarar tvärsnittsarean $\sigma = r_e^2$ för den s.k. **klassiska elektronradien**, som är $r_e = \alpha\lambda_e = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$. Notera att r_e är mycket mindre än radien av en atom⁸, närmare radien av en atomkärna runt en femtometer. Radien r_e har heller inget direkt att göra med radien hos något fysiskt objekt alls: bättre är att hålla i åtanke produkten $r_e = \alpha\lambda_e$, där $\alpha \approx 1/137$ är finstrukturkonstanten och λ_e är elektronens Compton-våglängd. Uttrycket $r_e = \alpha\lambda_e$ gör det tydligt att den är en elektromagnetisk effekt (dvs. om vi skulle slå av elektromagnetism, $\alpha = 0$, skulle tvärsnittet $\sigma \propto r_e^2$ bli noll) och egentligen en kvantmekanisk effekt (partiklar har våglängd λ_e), fast det för låg energi går att beskriva med klassiska vågor, som Thomson gjorde.

samma sak är att integrera över ϕ som ger 2π och ge formler för $d\sigma/d(\cos\theta)$, som man gör i partikelfysik-böcker.

⁸Det är heller inte egentligen en radie av en cirkel, utan arean av en kvadrat r_e^2 ! Det finns helt enkelt ingen skarp gräns då växelverkan slår av, så man skulle kunna säga exakt var det är, utan man väljer något praktiskt mått.

3.6 Flöde Φ

Jämför Bushbergs diskussion med vår piltavleanalogi (kompendiet Inledande mod.fys) där rate $R = \Phi\sigma$ (antal partiklar per sekund = flödet gånger tvärsnittet). Deras *flux* Φ är det som partikelfysiker kallar *luminositet* eller *flöde* Φ (utan prick), deras *fluence* är det som partikelfysiker kallar *integrerad luminositet*

$$\text{fluence} = \int \text{flux } dt$$

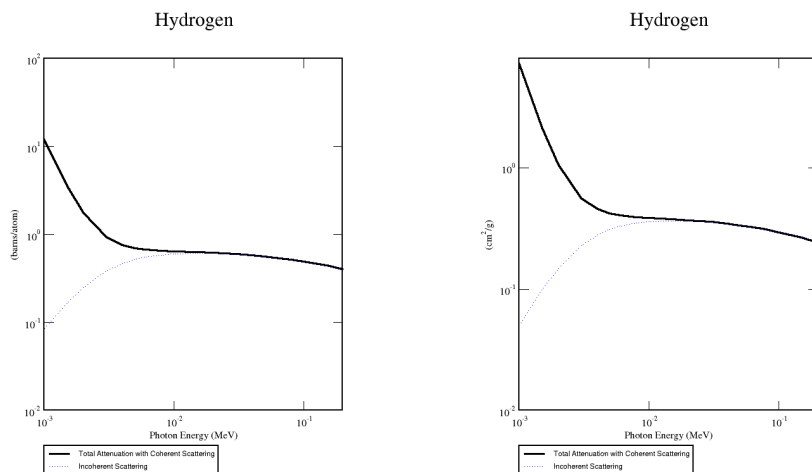
Bara man kollar att man har rätt enhet blir man inte förvirrad. Jämför också differentiell rate, alltså $dR/d\theta$ per vinkel också, som för $d\sigma/d\theta$ ovan.

Man kan också prata om *energy fluence* Ψ som är fluence multiplicerat med fotonenergin. Bushberg skriver då

$$K = \Psi \frac{\mu}{\rho}$$

och jag tror vi skall jämföra det här med vårt $R = \Phi\sigma$, i följande bemärkelse. Mätning av K är det man gör, precis som man i partikelfysik mäter rate R , antalet partiklar per sekund, gärna som funktion av energi och vinklar. Men det inkluderar ett "trivialt" beroende på hur mycket man skickar in, så den mer situations-oberoende mätningen är om man delar med hur mycket man skickar in, alltså från sina mätdata över K räknar ut *mass-attenueringen* μ/ρ .

Övning: kom ihåg från exemplet om neutriner genom bly att $\mu = 1/\ell = n\sigma$, där n är partikeldensiteten (antal atomer per kubikmeter). Från $\mu = n\sigma$, vad har mass-attenueringen⁹ μ/ρ ovan för enhet? Här är ett exempel från databasen XCOM [15] på μ/ρ på enklast möjliga, enbart väte:



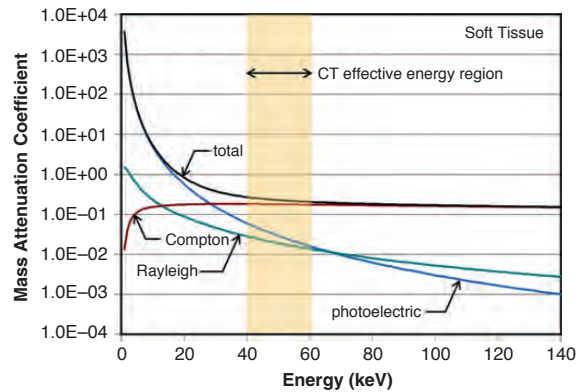
där "incoherent" är Compton, som vi ser dominerar från $10 \text{ keV} = 0,01 \text{ MeV}$. XCOM låter dig välja enhet: barn/atom (vänstra figuren) eller cm^2/kg (högra figuren), där $1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$ är standardenhet för tvärsnittsarea (en uranatom, som är "stor som en lada (barn)"). Gjorde du föregående övning om enheter förstår du varför XCOM ger de två alternativen.

Notera att attenueringen μ , och därför totala spridningstvårsnittet $\sigma = \mu/n$, avtar med energin. Differentiellt tvärsnitt $d\sigma/d\Omega$ beror både på vinklar och energier, och innehåller alltså mer information än hur många partiklar som sprids i en viss vinkel (20 % ditåt, 30% ditåt, osv), för totala tvärsnittet är tydligen inte konstant utan det sprids också totalt sett färre partiklar för högre energi, dvs. hur många som utgör 100 % av de spridda partiklarna minskar med energin. Det betyder i sig inte att partiklar "försvinner", bara att färre sprids totalt. (Varning: här fokuserade jag på graferna ovan, men attenuering är inte alltid en monotont avtagande funktion av energin: testa vid lägre energier.)

⁹Det är nog bra att vara tydlig och kalla kombinationen μ/ρ mass-attenuering och μ självt attenuering. Men för givet ämne (given densitet ρ) är de ju rent proportionerliga. Det är μ som förekommer i $I = I_0 e^{-\mu x}$, alltså inversa meter (eller centimeter).

3.7 Sammanfattning av grundläggande koncept: vad är viktigt?

Nu när vi gått igenom några grundtankar kan vi titta vad som är viktigt. Bushberg fig.10-19 visar att Compton-spridning i vävnad står för störst del av attenueringen från 40 keV och uppåt (notera att vertikala skalan är logaritmisk, inte horisontella som ovan). Nere vid 20 keV och 30 keV dominerar istället fotoelektriska effekten. Rayleigh dominerar aldrig.

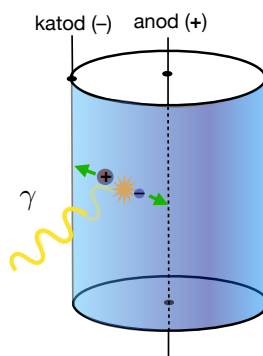


4 Detektion

Röntgenstrålarna måste sedan detekteras för att kunna göra en bild! Det kan vara bra att repetera lite om olika typer av [partikeldetektorer](#) i partikelfysik, t.ex. i kompendiet Inledande modern fysik, som ledde till många av detektorerna som används i medicinsk fysik.

4.1 Gasjoniseringskammare

En klass av detektorer är [gasjoniseringskammare](#), som inkluderar tre sorter: joniseringskammare (låg spänning), proportionalitetsräknare (högre spänning) och Geiger-Müller-(GM)-rör, som i Geiger-mätare (ännu högre spänning).



Här är mediet luft. Ett bekant exempel på en joniseringskammare med luft är en joniserande rökdetektor som innehåller americium-241, som sönderfaller till neptunium-237 och skickar ut α -partiklar¹⁰, som joniserar luftpartiklar och ger en mätbar ström och väcker dig, om du sov när ditt hus brinner. Motsvarande detektor i partikelfysik är ofta cylindrisk, som i figuren: cylinderskalet är negativt och mitten är positiv, så jonerna dras utåt och elektronerna inåt, och ger en mätbar ström. Ett modernt

¹⁰I många länder håller joniserande rökdetektorer på att fasas ut till förmån för optiska rökdetektorer.

exempel i partikelfysik är ett så kallat "strå" med en ädelgasblandning i. Det sitter 300 000 strån i ATLAS-detektorn på LHC [4].

4.2 Diod

Ett snarlikt sätt är använda en diod, dvs. det är inte plus och minus som i anod och katod i figuren ovan, utan det är en pn-övergång i halvledare som kisel. Det finns sådana t.ex. från svenska företaget [RaySafe](#). Istället för att den inkommande fotonen slår bort en elektron från en atom och lämnar en positiv jon så skapar den inkommande fotonen ett elektron-hål-par i mediet (gittret av joner och elektroner i halvledaren).¹¹ För våra ändamål här är det ingen stor skillnad med ovanstående: ersätt "atom" med "medium", ersätt "elektron+jon" med "elektron+hål" och använd samma resonemang som ovan.

Vi kan tänka oss att en detektor har en rumslig upplösning på 1 kubikcentimeter, och är känsligare för hög energi. Ett typiskt resultat kan då vara som i Bushberg.

5 Simulering

Erfarenhet: current-time product i mAs (milli-ampere-sekunder) ges ungefär 30% rätt av simuleringen, men bättre att använda mätvärden.

5.1 Monte Carlo

Namnet på [Monte-Carlo-metoden](#) kommer från casinospel, dvs. att slumpa. Den mest grundläggande tillämpningen är att räkna ut arean under grafen för en given funktion, dvs. att integrera funktionen numeriskt. Det finns många andra sätt att integrera numeriskt, så det är i sig inget särskilt med Monte-Carlo-metoden – ibland är den bättre än andra, ibland inte. Metoden har brett användningsområde, t.ex. Landau-Binder [5] är en trevlig bok om Monte-Carlo i statistisk fysik, lite mer om den nedan. Viktigare än att läsa hela böcker om det vore att koppla lite till material ni redan sett, t.ex. kap.3 i gratisboken Gould & Tobochnik från Termodynamik och statistisk fysik (FYGB02, minns du?). I uppgift 3.60 ger de ett enkelt exempel på Monte-Carlo-metoden. [Här](#) är Java-programmet de syftar på, det kan man prova utan att sätta sig in i detaljer.

5.2 Metod

Monte-Carlo-metoden är mer allmän än att utföra integraler numeriskt: det kan användas som samlingsnamn för många olika metoder att använda slumpetal.¹² I partikelfysik finns det t.ex. [Pythia](#), en svensk Monte-Carlo-simulering som används vid LHC på CERN. Pythia tar input av en process inne i protonen mellan kvarkar och gluoner, och räknar ut hela skurar (och *kvastar*) av elektroner, myoner, pioner och andra partiklar som kommer ut och kan mätas i detektorerna.

I strålningsfysik är situationen liknande: vi kan ta en given foton, skicka in den i patienten och "rulla tärning" vid varje steg vi vill bestämma vad som händer med när den stöter på olika typer av atomer i patienten. Tänk då att du har förberett en tabell med möjliga resultat, t.ex. slår du 1 till 5 på tärningen blir det Compton-spridning, slår du 6 blir det Rayleigh-spridning. (Ord som "slumpmässig" tolkas ofta i vardagsspråk som "samma sannolikhet för alla möjliga utfall", det är en anledning att använda finare ord som *stokastisk*: i det här exemplet är det som du ser fem gånger större chans

¹¹Jag diskuterar pn-övergångar i mina anteckningar om solceller. Solceller är stora fotodioder, och tillämpningen där är att producera ström utan att använda upp för mycket energi in. Här vill vi enbart mäta strömmen, och därför har vi inget emot att artificiellt förstärka den genom att föra in energi.

¹²Föregångare till slumpetalsbaserade metoder har nog funnits mycket länge, men man brukar ange folk i Manhattanprojektet på 40-talet som bland de första som konkret programmerade algoritmer. I Gould-Tobochnik diskuteras Metropolis-algoritmen, uppkallad efter Nicholas Metropolis som konstruerade rör-datorn [MANIAC](#) runt 1952. Mer om hur man producerar slumpetal i appendixen.

för Compton än Rayleigh, det är alltså stokastiskt men inte samma chans för alla utfall, fast vi använde en rättvis tärning. Inget konstigt!) Sedan när vi fastställt att det blev Compton-spridning gör vi en tabell med sannolikheter för olika spridningsriktningar (θ, ϕ) och slår tärning igen, och så vidare. Till slut när fotonen tagit sig ut ur patienten skriver vi upp på en lista vilket håll fotonen åkte åt i sjukhusrummet – där den kan detekteras – och hur mycket energi som deponerades i patienten och exakt var inuti patienten. Sedan gör man det många gånger (t.ex. 10 000) och studerar resultaten statistiskt.

En poäng med Monte-Carlo-metoden i spridningsexperiment i allmänhet är att särskilt om en foton sprids *flera gånger* så är det ganska komplicerat att räkna ut en total formel för det. I partikel-fysik är det ibland viktigt, t.ex. för gluoner räknar folk ut teoretiska tvärsnitt inte bara för spridning $2 \rightarrow 2$ (två partiklar studsar mot varandra, analogt med Compton-spridning) utan också $3 \rightarrow 3$, osv. I röntgendiagnostik får man acceptera den patient man har och kan inte välja hur olika grundämnen skall ställas upp och testa teoretiska förutsägelser i den uppställningen, som i ett fysikexperiment. Man kan däremot tänka sig konstgjorda uppställningar med vävnads-liknande material då man kan testa en sådan tänkt formel, och det är delvis sådant som XCOM handlar om; mer om det nedan.

Hängde du med borde du nu ha en mer grundläggande fråga: om vi går tillbaka till den första spridningen, var fick jag tabellen ifrån som sade att det var 5 av 6 för Compton? Det är där den grundläggande fysiken kommer in, det säger Monte-Carlo-metoden i sig inget om. Det fysik-inputet kan antingen tas från teoretiskt uträknade formler, eller från mätdata. Bäst är bägge samtidigt: teoretiskt uträknade formler som noggrant testats mot mätdata, som jag diskuterar i sektion 9.

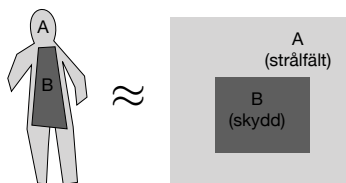
6 Effekt på människor

Monte-Carlo-program som PCXMC använder sedan de uträknade doserna till olika organ i patienten, och jämför med data från Hiroshima och Nagasaki. Om man antar linjärt (säkert inte exakt sant, men som första uppskattning) så är dödsrisken väldigt grovt 5%/Sv, dvs. 20 Sv är ungefär säker död, men man vill förstås hålla sig långt, långt under det i sjukhussammanhang.

De fenomenologiska faktorerna kommer in när man vill vara mer detaljerad än så: man vet från data något om hur stora riskerna är för varje typ av strålning på varje typ av vävnad. Varför är olika strålning olika farlig, borde inte bara totala energideponeringen spela roll? Majoriteten av DNA-enkelsträngsbrott repareras på en millisekund. Alfapartiklar bryter ofta två DNA-strängar, för den är tung och plöjer ganska långsamt igenom, istället för att passera igenom som en "blix" som fotoner.

6.1 Effekt på anställda

Det är intressant att betrakta inte bara patienten utan vårdgivaren (t.ex. läkare, sjuksköterska). Man har skyddsförkläden med bly i, men inte över hela kroppen. Som vanligt i fysik kan vi börja med någon slags enkel modell med fyrkantiga eller sfäriska sjukhusanställda:



Dosen ges då av A minus B. Det här handlar Olof och Henriks examensarbeten om.

7 Bildtagning

När fotonerna väl kommer ut ur patienten till detektorn vill man konstruera fina och lättolkade bilder för olika detaljerade diagnossyften. Det kommer in en hel del intressant optik som PSF (*point spread function*) och varianter av den. Sådan optik är lika relevant för vanliga kameror som för teleskop i astrofysik. Matematiken är också relevant för stokastiska metoder (varav vi övade en del med fördelningsfunktioner både på termo och Mat.fys. II).

7.1 Fouriertransform

Fig.4-12 i Bushberg bör kännas bekant. Funktionerna Rect och Sinc diskuterar jag i matematiska anhanget till vårt Fysik-3-kompendium (se Mat.fys.II, eller Intro.teor.fys.). Se min [video om fouriertransformer](#) där jag också diskuterar grundläggande fourieranalys av bilder (KaU:s logga).

7.2 Nyquist-frekvens

Dyker även det upp i Bushberg. Samme Nyquist som i "Nyquist-salen", dvs. Harry Nyquist från Nilsby i Kils kommun. Nyquist-frekvens och Nyquist-gräns är en väldigt allmän teori om diskret sampling av kontinuerliga funktioner som även är relevant för mobiltelefoner och många andra saker.

7.3 "Kvantbrus"

"Kvant" i kvantbrus som det används i Bushberg är inte identiskt med konceptet "kvant" i kvantfysik, men några av exemplen de ger är exakt det som menas i kvantfysik. De andra är klassiska exempel på något som är finkornigt men som inte är kvantfysiskt.

8 MRI

Nu fokuserar vi på röntgen här, men varför inte lära sig lite grunder i MRI när ni ändå är på gång? **Övning:** I matematisk fysik II räknade vi ut magnetiska resonansfrekvensen för protoner. Här står det 64 MHz för 1.5T. Verkar det stämma? Prova också PhET-Java-appen vi diskuterar i kompendiet. Läs lite om MR Artifacts, s. 474. För den som är riktigt intresserad har jag separata anteckningar om MR-mätningar.

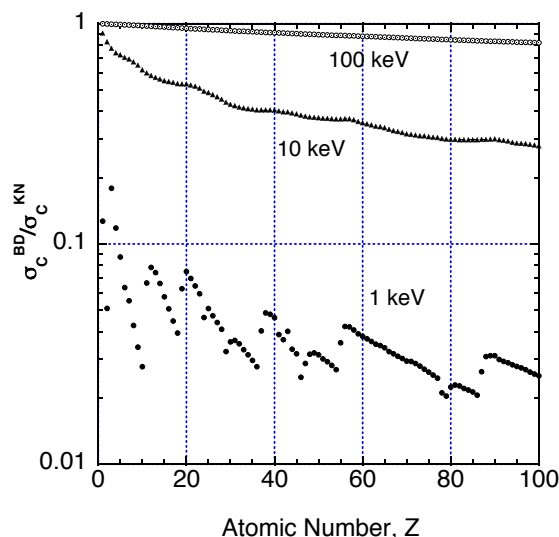
9 Modellering

Efter den här introduktionen, låt oss försöka oss på lite modellering.

- Antag att alla elektroner blir lokalt absorberade, dvs. deponerar energi i organet vi tittar på. (I fotoelektriska: ingen γ kvar, så deponera och börja på nästa röntgenfoton).
- Antag att inget beror på vinkeln ϕ kring strålriktningen.

Det är en trevlig diskussion i Jackson av approximationer hur Compton-spridning från en enskild atom beror på Z . Men man måste veta lite om hur atomer av olika atomnummer är distribuerade i material, och Bushberg skriver: "*With the exception of hydrogen, the total number of electrons/g is fairly constant in tissue; thus, the probability of Compton scattering per unit mass is nearly independent of Z , and the probability of Compton scattering per unit volume is approximately proportional to the density of the material.*"

En annan fråga är om resonanser i spridning, som skulle kunna göra att även atomer nära varandra i periodiska systemet har rätt olika egenskaper. I Hirayama [9] hittar man följande graf för förhållandet mellan bunden och fri elektron (se nedan), det är stark variation med Z för låg energi:



Redan för 10 keV är det en ganska mjuk funktion, men det kanske är bra att ha grafen i åtanke i alla fall. Hursomhelst kan vi också tänka oss att fokusera på approximativt fixt Z för vävnad.

9.1 Grundläggande koncept

Focus-skin distance (FSD) är avståndet till patienten.

9.2 Grundläggande fysik

Jag betraktar Compton-spridning av inkommande röntgenfotoner mot en sfär av vatten (hyfsad approximation till vävnad, tror jag) och använder Klein-Nishina-tvärnsnittsformeln¹³, som är bra ur utbildningssynpunkt för vi härleder den på en kurs i kvantfältteori här (och några radiologi-artiklar jag hittat använder också den, som [6]).

Jag tänker mig att inkommande energidistribution är given, och räknar ut spridningen runt sfären.

Det blir någon slags Radon-transform, på samma sätt som de ursprungliga kvantfysik-experimenten gav en slags Fourier-transform av gittret i en kristall (t.ex. Davisson-Germer, som studenter ibland minns från kurs i modern fysik, men det var också så i deras föregångare som röntgenkristallografi).¹⁴

En potentiellt viktigt effekt är att elektronen som sprids inte är fri som i den ursprungliga Klein-Nishina-uträkningen, utan bunden i en atom. Men om det är en valenselektron (som i Bushberg fig. 3-7, en elektron i M-skalet på en stor atom) så kanske det är en svag kraft på elektronen. En metod för att modellera det är Waller-Hartree¹⁵, där man i praktiken multiplicerar Klein-Nishina-tvärnsnittet med en funktion S som kallas "inkoherent-spridning-funktionen" (se t.ex. Hirayamas anteckningar [9], ekv. 8):

$$\frac{d\sigma_{BD}}{d\Omega} = S(q, Z) \frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega}$$

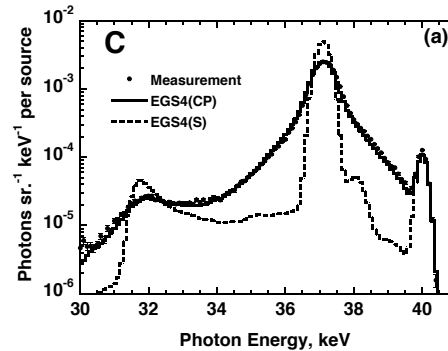
där $d\sigma_{KN}/d\Omega$ är ekv. (1) i tidigare sektion. Det verkar som om $S(q, Z)$ väsentligen tas från data, och vi ser i grafen ovan att den ger en 20-30% korrektion för lågt atomnummer och runt 50 keV, och

¹³Och Oskar Klein var svensk! Han gav sitt namn till min förra arbetsplats, Oskar-Klein-centrat i Stockholm.

¹⁴I atomfysik och partikelfysik, t.ex. i Sakurai, beskriver man ofta utsträckta objekt med en *formfaktor*, väsentligen Fourier-transformen av objektets form. Man bör inte tänka sig det som ett makroskopiskt utsträckt objekt, som patienten, men det skulle kunna vara t.ex. en vattenmolekyl. Å andra sidan verkar en del teoretiska artiklar inte bry sig om det.

¹⁵Ivar Waller var svensk. Han hade viktig historisk betydelse.

mer för högre atomnummer och för lägre energi. Ett av många moderna försök att förbättra det är *relativistiska impulsapproximationen* där det finns en grupp i Linköping (t.ex. Carlsson, Ribberfors [14]). Hirayama studerar också doppler-breddning av toppar:



Hur är det med spridning flera gånger? I teoretisk fysik brukar man tänka sig spridningar som en taylorutveckling i en kopplingskonstant ($\alpha \approx 1/137$ i kvantelektrodynamik), så man arbetar först med enkelspridning, nästa uträkning är två spridningar, osv. Men se kommentaren ovan: här är det nog bättre att göra Monte Carlo. Jag börjar alltså med bara en spridning. Man vill sedan i princip relatera distributionen till PCXMC.

Då kommer intressanta modelleringsfrågor. Till exempel om det är en hyfsad första approximation att det sprids i planet istället för i rummet.

I dokumentationen för PCXMC står det väldigt lite om hur de verkligen gör, men två informationsbitar ger de i alla fall: På s.26 står att fysikinput kommer från Storm and Israel (1970) och Hubbell et al. (1975). Det står också i en referens att spridning flera gånger är viktigt, vilket är rimligt i ett makroskopiskt objekt, och jag förstår det som att användaren specificerar inkommande distribution i vakuum inte i luft. Mer detaljerad dokumentation hur de gör vore intressant.

9.3 Vidare läsning

Comptons klassiska artikel [7] från 1923 är rätt svårläst och kom före kvantmekanik. Waller-Hartree [8] från 1929 är även den intressant rent historiskt men också svårläst idag. Bra moderna källor verkar vara LBL [10] och NIST:s databas XCOM [12]. Hubbell är inblandad i XCOM och har t.ex. skrivit en översikt [13] över all forskning sedan 1930 (!) om inkoherenta spridningsfunktionen S (se ovan), med slutsatsen att den approximationen funkar ganska bra, medan t.ex. Ribberfors arbete (Linköping) i relativistiska impulsapproximationen får lite sämre utvärdering – från Hubbells mät-synpunkt. Å andra sidan verkar åtminstone tidiga artiklar av Ribberfors [14] och andra åtminstone försöka förstå saker bättre ur ett teoretiskt perspektiv, och Hubbell skriver också att även han tycker sådant är viktigt.

A Slumptal

(Det här är inte viktigt om man inte är så intresserad av hur Monte-Carlo-metoded funkar internt.) Det är faktiskt två hela delkapitel bara om hur man gör bra slumptal i boken Landau-Binder (kap 2.2.5 och 5.7.6). De anger tre test:

1. Uniformity test: bryt upp intervallet $[0,1]$ i många små "bins" och efter att ha genererat en massa slumptal, kolla att antalet i varje "bin" är ungefär lika.
2. Overlapping M-tupel-testet: kolla statistiska egenskaper hos antalet gånger M-tupler av siffror (alltså "111" är en 3-tupel av ettor) dyker upp i sekvensen du har fått, alltså fixera M till t.ex. 3 och kolla hur många av varje "111", "222", osv du får.
3. Parking lot test: Gör en plott av ett m -dimensionellt rum där m -koordinaterna av varje punkt bestäms av m påföljande kall till slumpgeneratoren, och titta om du ser strukturer (ränder, etc). (Det

är lättare att förstå vad de menar om du sätter $m=2$: ta varje par av slumpstal och tolka dem som (x, y) -koordinater för en prick i ett plan, och plotta prickar i det planet och se om du ser ränder.)

De här är designade för att mäta olika kända problem med pseudoslumptal, t.ex. det finns metoder som ser bra ut under metod 1 men har starka korrelationer som upptäcks med metod 2 eller 3. Jag tycker såhär: pseudoslumptal är inte fysik utan datavetenskap. Å andra sidan är det en väldigt viktig fråga om man skall få ut fysik ur en simulering. Kap 5.7 i Landau-Binder handlar enbart om hur folk har haft problem med simuleringar av Ising-modellen för magnetisering från problem med slumpstalsalgoritmer! De menar att "Wolff-algoritmen" är klart sämre än Metropolis-algoritmen som G&T använder ur den synpunkten, men det är inte riktigt känt varför – nuvarande hypotesen verkar vara att det finns vissa kända korrelationer i vissa slumpstalsgeneratorer som på något sätt "snedvrider" algoritmen på ett systematiskt sätt. De citerar en artikel av några som heter Barash och Shchur från 2006 och de verkar kämpa på med det här även nuförtiden [11]. Slumptal är inte "egentligen" fysik – men om det inte är fysik alls, varför är Barash-Shchur-artikeln isåfall publicerad i den största fysiktidskriften i världen, Physical Review? Det kanske är värt att fundera lite på för den som funderar att använda Monte Carlo.

Referenser

- [1] J.Bushberg, J.Seibert, E.Leidholdt, J.Boone, "The Essential Physics of Medical Imaging" (2011), Lippincott Williams & Wilkins. [Amazon UK](#).
- [2] E. Berglund, B-A. Jönsson, "Medicinsk Fysik", [Studentlitteratur](#).
- [3] M.Isaksson, "Grundläggande strålningsfysik", Studentlitteratur, Lund 2011.
- [4] M. Aaboud *et al.* [ATLAS Collaboration], "Performance of the ATLAS Transition Radiation Tracker in Run 1 of the LHC: tracker properties," JINST **12** (2017) no.05, P05002 [arXiv:1702.06473](#)
- [5] Landau, Binder, "A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics" (2009), [Amazon](#).
- [6] S. Moon, M. Haltmeier, "Analytic inversion of a conical Radon transform arising in application of Compton cameras on the cylinder", [arXiv:1607.00867](#)
- [7] A.H. Compton. "A Quantum Theory of the Scattering of X-Rays by Light Elements" (1923). Physical Review. 21 (5): 483–502. [Länk](#)
- [8] I. Waller and D.R. Hartree, "On the intensity of total scattering of X rays" (1929), [Proc.R.Soc.London](#).
- [9] H. Hirayama, "Lecture Note on Photon interactions and Cross Sections" (2000), [länk](#)
- [10] LBL X-ray handbook, Sektion 3.1, [xdb.lbl.gov/Section3/Sec_3-1.html](#)
- [11] L.Yu. Barash, L.N. Shchur "PRAND: GPU accelerated parallel random number generation library: Using most reliable algorithms and applying parallelism of modern GPUs and CPUs" (2014), Computer Physics Communications 185 1343-1353, [arXiv:1307.5869](#)
- [12] XCOM, NIST, [nist.gov/pml/xcom-photon-cross-sections-database](#)
- [13] J.H. Hubbell, "Review and history of photon cross section calculations" (2006), Phys Med Biol. Jul 7;51(13):R245-62 [PubMed](#).
- [14] R.Ribberfors, "Relationship of the relativistic Compton cross section to the momentum distribution of bound electron states" (1975), Phys. Rev. B 12, 2067
- [15] XCOM, tabell och graf, [physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/ElemTab/z01.html](#)