

29/5

Kvantfysikens principer, 12

Mekanik: $F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$ (1687)

Ingen härledning, utan 1. förstå vl, hl
2. använd! statik, dynamik, ...

Kvantmekanik: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$ (S-ekv.)
1926

Samma strategi: 1. förstå ψ (svårare!
intuitions erfarenhet)
2. använd! Bundna tillstånd,
dynamik, ...

Ekvivalent: Heisenbergs matrismekanik
Relativistiskt: Feynmans funktionalintegral } inte här!

Lösningar (till S-ekv.)

Vi vet att stationära lösningar
i x -oberoende fallet ser ut som $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ (för energi E)

Ansats: $\psi(x,t) = a(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

kom ihåg: $\psi(x,t) = \langle x | \psi(t) \rangle$ (jfr. $G_I(t) = \langle I | \psi(t) \rangle$)

Stappa in
ansatsen
i S-ekv.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = a'(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = a''(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a(x) \left(-\frac{i}{\hbar}E\right) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

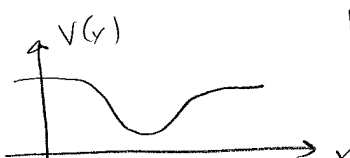
S-ekv: $-\frac{\hbar^2}{2m} a''(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} + V(x) a(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} = i\hbar a(x) \left(-\frac{i}{\hbar}E\right) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$
(se ovan)

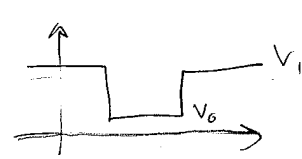
$$\div e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} a''(x) + V(x) a(x) = i\hbar \left(-\frac{i}{\hbar}\right) E \cdot a(x)$$

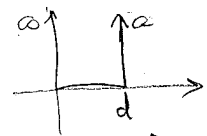
$$\Rightarrow a''(x) = \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) a(x) \quad \underbrace{-\frac{i^2 \hbar}{\hbar}}_{=1}$$

(1)

så nu får vi lösa ekv. för $a(x)$ för givet $V(x)$

1) Riktig potential: 

2) Förenklad potential:  två konstanta värden
 $V = V_0, V = V_1$

3) Ännu mer förenklad:  $V_0 = 0, V_1 = \infty$
$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < d \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

∞ motkraft om man försöker gå in i väggen!

2+3) jfr. igår, men nu är V exakt konstant V_{konst} i vissa områden

$$E > V_{\text{konst}} \quad \phi(x) = a \sin kx + b \cos kx$$

(jfr. )
inte exakt sin eller cos här

$$E < V_{\text{konst}} \quad \phi(x) = a e^{kx} + b e^{-kx} \quad (**)$$

Räkna ut k, κ genom att stappa in i ekv.
(övm. 16-P3)

$$\Rightarrow k = \sqrt{2m(E - V_{\text{konst}})/\hbar^2}$$

$$\kappa = \sqrt{2m(V_{\text{konst}} - E)/\hbar^2}$$

för varje V_{konst} ,
använd det är k och κ
som är reellt

(lättare att visualisera
lösningen)

3) utanför gränsen: $E < V_{\text{konst}}$ så lös. (**)

$$\text{men } \kappa = \sqrt{2m(\infty - E)/\hbar^2} = \infty$$

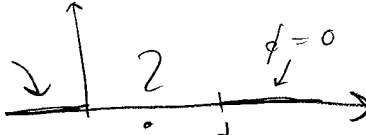
$$\text{vill ha } \phi(x) \text{ ändlig} \Rightarrow a = 0$$

$$\text{och } e^{-\kappa x} = e^{-\infty \cdot x} = 0 \quad \therefore \phi = 0$$

$$\Rightarrow \text{ta } b = 0$$

utanför

"Pussla ihop" ("matcha")

$\psi=0$  $\Rightarrow \psi(0)=0, \psi(d)=0$ (*)

i gruppen: $E > V_{\text{konst}} \Rightarrow \psi(x) = a \sin kx + b \cos kx$

stappa in (*) $\Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 1 = 0 \rightarrow b=0! \\ a \sin kd + b \cos kd = 0 \end{cases}$

$\psi(x) = a \sin kx$ där $a \sin kd = 0$

Måste a vara reell?
Nej, men kan välja a reellt (Pändras inte)

$kd = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$
 $k_n = \frac{(n+1)\pi}{d} \quad n = 0, 1, 2, \dots$

får en serie lösningar
för olika diskreta värden n

$k = \sqrt{\frac{2m(E-0)}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \Rightarrow E = \frac{(\hbar k)^2}{2m} = \frac{((n+1)\pi\hbar)^2}{2md^2}$

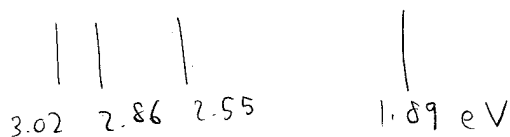
Som i går: 
Nu:  Energi-
kvantisering
exakt noll ($\psi(0)=0, \psi(d)=0$)

Konceptfråga: Vilket fysikaliskt system är det här relevant för?

- 2a (A) Väteatomen $\oplus e^-$ (R) fast väldigt grav förenkling
- 2 (B) Fri partikel (t.ex. el. mikroskop) X
- 1 (C) Inget (R) bokstavligen beskriver det inte något, men i stora drag

Väteatomens absorptionspektrum (övn. 2-47, läs om F2-5)

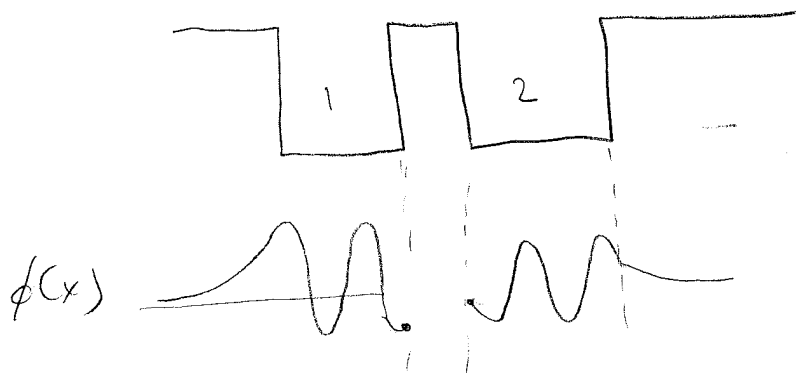
ter Balmer-serien
(1885)



en användning: astronomi!

Tunneling

I stället för grop, ta två gropar



igen: självens $\phi_n(x)$

pusla:

går exponentiellt
mot noll från
bägge hållen

"kantar bort från
x-axeln"

$$P(x, \Delta x) = |\phi(x)|^2 \Delta x$$

("Kvant-intuition")

Konceptfråga

Kan häg: ϕ här är stationär
jfr. ammanakmoletylen $|I\rangle, |II\rangle$

(A) om vi sätter partikeln i grop 1,
stannar den i grop 1

x

(B) P att mäta partikeln mellan groparna är noll

x

(C) I de stationära tillstånden kan
vi mäta partikeln i både grop 1 och grop 2

(2)

Mer om x och t - beroende: PhET - länk
(se sidan)

(4)