

Int. uppg. 2, Lösning

Givet:

$$|\psi(t', t_0)\rangle = \frac{1}{2} \left[-ie^{-i(a+\omega_0\frac{T}{2})} (e^{-ib}|+,+\rangle - ie^{ic}|-,+\rangle) \right. \\ \left. + ie^{i(b+\omega_0\frac{T}{2})} (-ie^{-ic}|+,-\rangle + e^{ib}|-,-\rangle) \right]$$

Jämför det här med en allmän utveckling i de fyra basstillstånden:

$$|\psi(t', t_0)\rangle = C_{++}|+,+\rangle + C_{-+}|-,+\rangle \\ + C_{+-}|+,-\rangle + C_{--}|-,-\rangle$$

Notera att vi inte behöver veta a priori om det är snärjt eller inte. Vi identifierar:

$$C_{++} = \frac{1}{2} (-i) e^{-i(a+\omega_0\frac{T}{2})} e^{-ib} = -\frac{i}{2} e^{-i(a+\frac{\omega_0 T}{2}+b)}$$

$$C_{+-} = \frac{1}{2} i e^{i(b+\omega_0\frac{T}{2})} (-i e^{-ic}) = +\frac{1}{2} e^{i(b+\frac{\omega_0 T}{2}-c)}$$

Om vi introducerar $x = a + \frac{\omega_0 T}{2} + b$, $y = b + \frac{\omega_0 T}{2} - c$ blir det mindre att skriva: $C_{++} = -\frac{i}{2} e^{-ix}$, $C_{+-} = \frac{1}{2} e^{iy}$.

- a) Bob mäter foton 1 i z-led. Om vi tolkar uppgiften som att Alice inte mäter foton 2 alls, så får vi

$$P(\text{foton 1} = +z) = |C_{++} + C_{+-}|^2$$

Lite övning i komplexa tal: (jfr. förel.)

$$\begin{aligned} |C_{++} + C_{+-}|^2 &= \left(-\frac{i}{2} e^{-ix} + \frac{1}{2} e^{iy}\right) \left(-\frac{i}{2} e^{-ix} + \frac{1}{2} e^{iy}\right)^* \\ &= \left(-\frac{i}{2} e^{-ix} + \frac{1}{2} e^{iy}\right) \left(\frac{i}{2} e^{ix} + \frac{1}{2} e^{-iy}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4} e^0 - \frac{i}{4} e^{-i(x+y)} + \frac{i}{4} e^{i(x+y)} + \frac{1}{4} e^0\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{i}{4} (e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{i}{4} (2i \sin(x+y)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin(x+y) \end{aligned}$$

Testa om det beror på ω för säkerhets skull
(det var så uppgiften definierade
att vi ser interferens, via modulering,
dvs. beroende på ω) — kanske tas ω ut i $x+y$?

$$\begin{aligned} x+y &= \left(a + \frac{\omega_0 T}{2} + b\right) + \left(b + \frac{\omega_0 T}{2} - c\right) \\ &= a + 2b - c + \omega_0 T \\ &= \omega \frac{(t_1 + t_0)}{2} + 2 \cdot \omega \frac{t_1 - t_0}{2} - \omega \left(3 \frac{t_1}{2} - t_0 + T\right) + \omega_0 T \\ &= \omega t_1 \left(\underbrace{\frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2}}_{=0}\right) + \omega t_0 \left(\frac{1}{2} - 1 + 1\right) - \omega T + \omega_0 T \\ &= \frac{\omega t_0}{2} - (\omega - \omega_0) T \quad \text{nej, tas inte ut} \end{aligned}$$

$\therefore$ beror på ω — interferens

$$\underline{\underline{P(\text{foton 1} = +z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\omega t_0}{2} - (\omega - \omega_0) T\right)}}$$

[man kan också tänka sig en annan tolkning — se c)]

är uppgiften!
inte är resultatet

$$b) \quad \text{Använd} \quad |+, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, +y\rangle + |+, -y\rangle) \\ |+, -\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}} (|+, +y\rangle - |+, -y\rangle)$$

$\Rightarrow$ ny utveckling i de nya bas tillstånden

$$|\psi(t_1, t_0)\rangle = C_{++} \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, +y\rangle + |+, -y\rangle) \\ + C_{+-} \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) (|+, +y\rangle - |+, -y\rangle) \\ (+ \text{ termer med } |-, \dots\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (C_{++} - i C_{+-}) |+, +y\rangle \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} (C_{++} + i C_{+-}) |+, -y\rangle \\ (+ \text{ termer med } |-, \dots\rangle)$$

Alltså:

$$P(\text{foton 1} = +z, \text{foton 2} = +y) \\ = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (C_{++} - i C_{+-}) \right|^2 \\ = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 \left| -\frac{i}{2} e^{-ix} - i \cdot \frac{1}{2} e^{iy} \right|^2 \\ = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 \cdot \left| \frac{1}{2} \right|^2 \left| -ie^{-ix} - ie^{iy} \right|^2$$

Enligt ledning:

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 \left| \frac{1}{2} \right|^2 4 \cos^2 \frac{x+y}{2} \\ = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{x+y}{2} \quad \left(= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(x+y) \right)$$

på samma sätt:

$$P(\text{foton 1} = +z, \text{foton 2} = -y)$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (C_{++} + i C_{+-}) \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 \left| -\frac{i}{2} e^{-ix} + i \cdot \frac{1}{2} e^{iy} \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 \left| \frac{1}{2} \right|^2 \underbrace{\left| -ie^{-ix} + ie^{iy} \right|^2}$$

Det här är lika med $4 \sin^2 \frac{x+y}{2}$.

Antingen kan man visa det på samma sätt som jag nämnde på föreläsningen

(bryt ut $e^{-\frac{ix}{2}} e^{+\frac{iy}{2}}$) eller på annat sätt,

eller gissa bara att det borde vara $\cos \rightarrow \sin$ baserat på ledningen och bifoga en graf som visar att det stämmer — vad som helst!

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 \sin^2 \frac{x+y}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sin^2 \frac{x+y}{2}}} \quad \left(= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos(x+y) \right)$$

Vi har redan visat att $x+y$ faktiskt beror på w , så de här sannolikhetserna uppvisar interferens.

c) Jämför svaren i a) och b).

Ledningen säger att vi skall betrakta

$$\begin{aligned} P(+, +y) + P(+, -y) &= \frac{1}{2} \cos^2 \frac{x+y}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x+y}{2} \\ &= \frac{1}{2} \quad (\text{trig. ettan}) \end{aligned}$$

Summan uppvisar ingen interferens.

Det är inte så lätt att se något samband med svaret i a) !

Den här uppgiften är den sista vi får bonuspoäng för, så nu kan jag kräva lite kreativitet.

Hur skulle uppgiften i a) ha kunnat ge svaret $\frac{1}{2}$? Jo, om vi hade haft

$$\begin{aligned} P(\text{foton 1} = +z) &\stackrel{?}{=} |C_{++}|^2 + |C_{+-}|^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

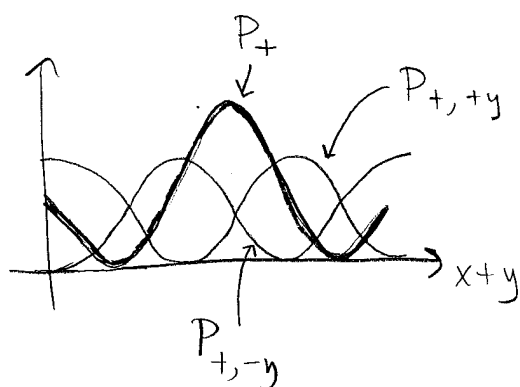
Så om Alice skulle ha mätt foton 2 i z-led i uppgift a), skulle hon ha förstört interferensen.

Eftersom uppgift a inte specificerar att Alice inte har mätt foton 2, bara att Bob inte har gjort det, är det här också ett OK svar på uppg. a) (om än något spetsfunderigt)!

C)

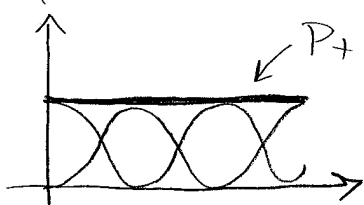
Den fysikaliska tolkningen är olika:

Om man tolkar a) så att Alice inte har mätt foton 2, den kanske riktiga tolkningen: interferensmönstren är olika. Man kan sluta sig till att det spelar roll för foton 1 huruvida Alice mäter foton 2



eller ej — ett tydligt tecken på snärjelse mellan de två.

Om Alice ändå mätte foton 2 i z-led i a), får vi fortfarande olika mönster, så samma slutsats gäller beträffande snärjelsen.



d) I den första bilden kan man inte säga att Alice har suddat ut information. I den andra kan man säga det: genom att mäta foton 2 i y-led, har hon "suddat ut" korrelationen ($\cos(\phi_1 - \phi_2) = \cos 90^\circ = 0$), och då kan man "få tillbaka" interferens som man hade förstört genom att mäta foton 2 i z-led. Ännu svårare: kan Alice vänta till efter tiden t' och ändå "sudda"?

(Ref.: Phys. Rev. Lett 84, s.1-5 (2000)) (6)