

13

Tentamen i Kvantfysikens Principer 000119 8-13

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare och utdelad formelsamling. Var noga med att motivera dina lösningar! Lycka till! *Anders Karlhede*

- 1) I ett experiment skjuts elektroner från en källa S och registreras i en detektor D . Mellan S och D finns två skärmar som elektronerna måste passera – skärmen närmast S har två hål medan den närmast D har tre hål. Ge ett uttryck för sannolikheten att observera en elektron i detektorn om

- a) inget av hålen observeras.
- b) ett av de tre hålen i skärmen närmast D observeras (så att man kan avgöra om elektronen passerat detta hål eller ej). (4p)

(Svaret skall uttryckas i amplituder för delar av vägarna på vanligt sätt.)

- 2) Beskriv kortfattat vad som händer i dubbelspaltexperimentet med elektroner då man med en lampas belyser spalterna för att undersöka vilken spalt elektronerna går genom! Hur beror resultatet av ljusets intensitet? Hur beror resultatet av ljusets våglängd? (4p)
- 3) Hur lyder Heisenbergs osäkerhetsrelation för en partikel som rör sig längs en linje? Förklara noga vad relationen innebär, gärna med ett exempel. (4p)
- 4) Två partiklar sprids mot varandra, $f(\theta)$ är amplituden för att spridningen sker med vinkeln θ . Antag att man har en detektor som registrerar partiklar som sprids vinkeln θ . Vad är sannolikheten att finna en partikel (vilken som helst) i detektorn om

- a) partiklarna är olika? (1p)
- b) partiklarna är identiska bosoner? (1p)
- c) partiklarna är elektroner med samma spinn? (1p)
- d) partiklarna är elektroner med olika spinn? (1p)

(Antag att partiklarnas spinn ej ändras under spridningen.)

- 5) Betrakta följande apparat (som är sammansatt av tre Stern-Gerlach apparater i olika riktningar och där atomerna kommer från vänster):

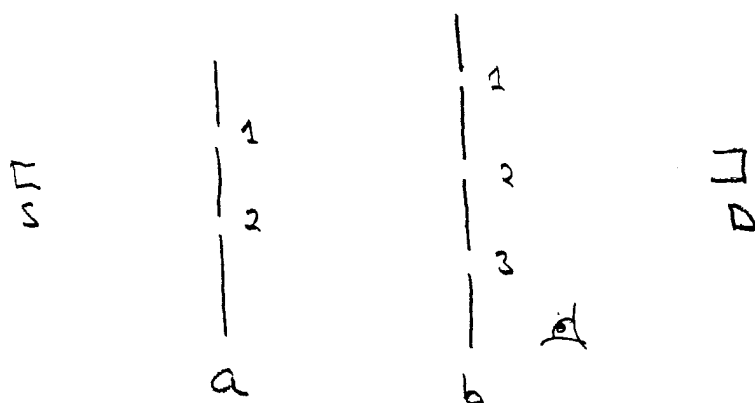
$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} +| \\ 0 \\ -| \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} +| \\ 0 \\ -| \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} +| \\ 0 \\ -| \end{array} \right\} \\ S & T & U \end{array}$$

- a) Vad är amplituden i Diracs notation svarande mot apparaten ovan? (1p)
 - b) I vilket tillstånd befinner sig atomerna efter passage av apparaten? (1p)
 - c) Om $S = T = U$, dvs om de tre apparaterna har samma riktning, vad blir sannolikheten att en atom som passerar den första apparaten, S , passerar hela apparaten? (1p)
 - d) Vad blir amplituden, i Diracs notation, om T apparaten ovan ersätts av en apparat där endast spinn ned $(-)$ vägen är blockerad? (1p)
- 6) Antag att man har ett stort antal identiska spinn 1 atomer, var och en i tillståndet $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle$. ($|m\rangle$, $m = 1, 0, -1$, är bastillstånd; spinnets komponent i $\hat{z}$ -riktningen är $s_z = m\hbar$ då atomen befinner sig i tillståndet $|m\rangle$.)
- a) Beräkna $\langle\psi|\psi\rangle$.
 - b) Antag att man mäter spinnets komponent i $\hat{z}$ -riktningen för var och en av atomerna, hur stor andel av atomerna har $s_z = 0$?
 - c) Vad blir *medelvärdet* av s_z ? (Medelvärdet är lika med summan av alla mätvärden dividerad med antalet atomer.)
 - d) Hur stor andel av atomerna passerar en apparat som bara släpper genom atomer i tillståndet $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |-1\rangle)$?
- 7) En partikel rör sig längs en linje och har en potentiell energi som beror på positionen längs linjen. Skriv ner den ekvation som beskriver detta problem i kvantmekaniken. Förklara noga vad alla ingående storheter betyder! Antag att man har funnit en lösning till ekvationen, vad är

då sannolikheten att partikeln befinner sig i ett litet intervall Δx i närheten av punkten x ? (4p)

- 8) Antag att en ammoniakmolekyl befinner sig i tillståndet $|1\rangle$ vid tiden $t = 0$. Vid tiden t mäter man molekylens energi, vad är sannolikheten att man då finner den lägsta energin? ($|1\rangle$ är ett av tillstånden där kvävemolekylen har en fix position relativt vätemolekylerna.) (4p)

①



$\langle D|bk \rangle$ amplituden för att elektronen skall gå från hål $k=1,2,3$ i skärm b till detektor D.

$\langle am|bk \rangle$ amplituden för att elektronen skall gå från hål $m=1,2$ i skärm a till hål $k=1,2,3$ i skärm b.

$\langle am|s \rangle$ amplituden för att elektronen skall gå från källan S till hål $m=1,2$ i skärm a.

- a) Om inget hål observeras får sannolikheten genom att addera amplituderna för alla sex vägar:

$$P = \left| \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^2 \langle D|bk \rangle \langle bk|am \rangle \langle am|s \rangle \right|^2$$

- b) Antag att hål 3 i b observeras. Sannolikheten blir nu en summa av sannolikheterna för att elektronen går genom b3 eller genom något av de två andra hålen i b:

$$P = \left| \sum_{m=1}^2 \langle D|b3 \rangle \langle b3|am \rangle \langle am|s \rangle \right|^2 + \left| \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 \langle D|bk \rangle \langle bk|am \rangle \langle am|s \rangle \right|^2$$

② Om man belyser spalterna med en lamp och får en ljusblick vid det ena eller det andra hålet för varje elektron som detekteras på skärmen (så att man vet vilket hål elektronerna gått genom) så försvinner interferensmönstret — man får samma resultat som om man adderar resultaten från att ett hål i taget är öppet.

Om ljusets intensitet minskar så passerar vissa elektroner utan ljusblick, dessa ger ett interferensmönster medan inget interferensmönster fås för de elektroner som inte observeras vid spalterna. Lägre intensitet betyder färre, men likadana, fotoner i ljuset.

Om ljusets våglängd ^{λ} ökas så påverkas elektronerna mindre i kollisioner (ty $p = \frac{h}{\lambda}$). När våglängden blir tillräckligt stor så återfås interferensmönstret, men samtidigt blir ljusbliken så stor att man inte kan säga om den är nära det ena eller andra hålet i skärmen. (Detta sker då $\lambda \approx$ avstånd mellan hålen.)

Se vidare Feynman

¹⁶ ③ Heisenbergs osäkerhetsrelation

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$$

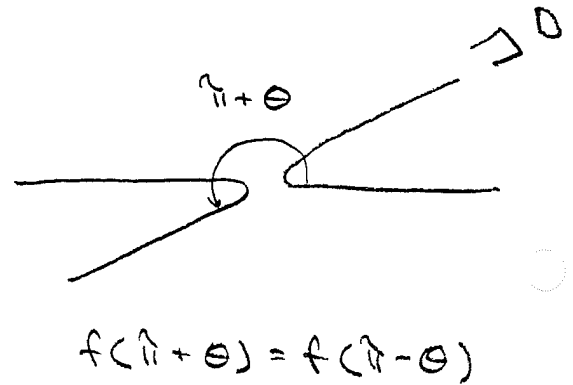
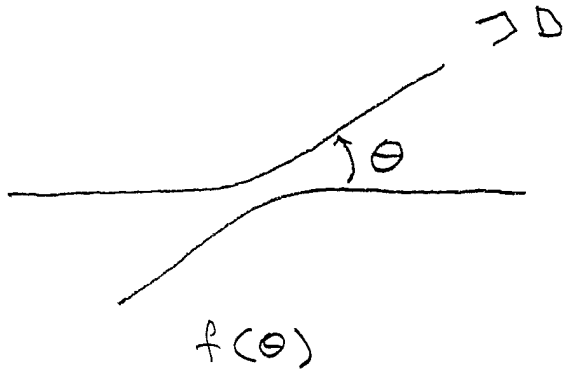
Δx är osäkerheten i partikelns läge i x-led.

Δp_x - " - " - rörelsemängd i x-led

Om man mäter läget (respektive rörelsemängden,) för ett stort antal partiklar som befinner sig i samma tillstånd så är Δx (respektive Δp_x) spridningen i mätvärdena. Osäkerhetsrelationen ger en gräns för hur noggrann man sannolikt kan bestämma läget och rörelsemängdens komponent i motsvarande riktning.

Se vidare Feynman.

④



Sannolikheten P att finna en partikel i detektorn är.

a) $P = |f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2$

b) $P = |f(\theta) + f(\pi-\theta)|^2$

c) $P = |f(\theta) - f(\pi-\theta)|^2$

d) $P = |f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2$

⑤ a) $\langle OU|OT\rangle\langle OT|OS\rangle$

b) $|OU\rangle$ (Tillståndet bestäms av sista apparaten.)

c) Sannolikheten blir 1, alla atomer som passerar la apparaten passerar följande apparater eftersom de är likadana.

d) $\langle OU|+T\rangle\langle +T|OS\rangle + \langle OU|OT\rangle\langle OT|OS\rangle$

17
⑥

$$|4\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle$$

$$\begin{aligned} a) \quad \langle 4|4\rangle &= \left(\frac{1}{2}\langle 1| + \frac{1}{2}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -1| \right) \left(\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

där vi använt $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$.

b) Andelen atomer med spin $s_z = 0$ är

$$\frac{|\langle 0|4\rangle|^2}{\langle 4|4\rangle} = \frac{1}{4}$$

c) Medelvärde $\bar{S}_z$ av S_z är

$$\bar{S}_z = \frac{1}{4} \cdot \hbar + \frac{1}{4} \cdot 0\hbar + \frac{1}{2} (-\hbar) = -\frac{1}{4}\hbar$$

d) Andelen av atomerna som passerar en apparat som bara släpper genom atomer i tillståndet $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |-1\rangle)$ är

$$|\langle \phi|4\rangle|^2 = \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right|^2 = \frac{1}{8}(3 - 2\sqrt{2})$$

(ty $\langle \phi|\phi\rangle = \langle 4|4\rangle = 1$).

⑦ Schrödingerekvationen

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + V(x)\phi(x) = E\phi(x)$$

beskriver en partikel med massan m som rör sig längs x -axeln och har potentiella energin $V(x)$.

E är partikelns totala energi

$\phi(x)$ är vågfunktionen, dvs (sannolikhets-) amplituden för att vid en mätning finna partikeln i punkten x .

Sannolikheten att partikeln befinner sig i intervallet $[x, x+\Delta x]$ är

$$P = \int_x^{x+\Delta x} |\phi(x)|^2 dx$$

Om Δx är litet så att $|\phi(x)|^2 \approx$ konstant i $[x, x+\Delta x]$ fås

$$P \approx |\phi(x)|^2 \Delta x.$$

⑧

Ammoniakmolekylen tillstånd vid tiden t :

$$| \Psi(t) \rangle = C_1(t) | 1 \rangle + C_2(t) | 2 \rangle$$

Enl. formelsamlingen

$$\begin{cases} C_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \\ C_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \end{cases}$$

$$| \Psi(0) \rangle = | 1 \rangle \quad \text{ger}$$

$$\begin{cases} C_1(0) = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 1 \\ C_2(0) = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$$

$$| \Psi(t) \rangle = \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} (| 1 \rangle + | 2 \rangle) + \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} (| 1 \rangle - | 2 \rangle)$$

Tillståndet med lägst energi är

$$| I \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} \frac{1}{\sqrt{2}} (| 1 \rangle + | 2 \rangle) \quad (\langle I | I \rangle = 1)$$

(Energi $E_I = E_0 - A$.)

Sannolikheten att ammoniakmolekylen är i detta tillstånd vid tiden t är

$$P = |\langle I | \Psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

(Vi har använt att $\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = \langle I | I \rangle = 1$.)

