

Tentamen i Kvantfysikens Principer 000415 9-12

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare och utdelad formelsamling. Var noga med att motivera dina lösningar! Lycka till! *Anders Karlhede*

- 1) I ett experiment skjuts elektroner från en källa S och registreras i en detektor D . Mellan S och D finns en skärm med fyra hål som elektronerna måste passera. Ge ett uttryck för sannolikheten att observera en elektron i detektorn om
 - a) inget av hålen observeras.
 - b) två av de fyra hålen observeras på ett sådant sätt att man kan avgöra om elektronen passerat något av dessa två hål men inte vilket av dem. (4p)

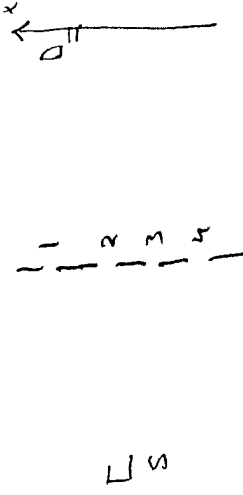
(Svaret skall uttryckas i amplituder för delar av vägarna på vanligt sätt.)

- 2) Antag att man har ett stort antal väteatomer som alla befinner sig i grundtillståndet. I detta tillstånd är väteatomens radie ungefär en Bohrradie $a_0 = 0.53 \text{ Å}$. För varje atom mäter man elektronens fart v (farten v är beloppet av hastigheten $\vec{v}$: $v = |\vec{v}|$). Antag att mätfelet är så litet att det kan försummas. Kommer man då att finna samma värde på farten v för elektronerna i de olika atomerna? Motivera! Om svaret är nej, uppskatta spridningen, Δv , i mätvärdena! (4p)
- 3) Antag att man har ett stort antal identiska spinn 1 atomer, var och en i tillståndet $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle$. ($|m\rangle$, $m = 1, 0, -1$, är bastillstånd; spinnets komponent i $\hat{z}$ -riktningen är $s_z = m\hbar$ då atomen befinner sig i tillståndet $|m\rangle$.)
 - a) Beräkna $\langle\psi|\psi\rangle$.
 - b) Antag att man mäter spinnets komponent i $\hat{z}$ -riktningen för var och en av atomerna, hur stor andel av atomerna har $s_z = 0$?
 - c) Vad blir medelvärdet av s_z ? (Medelvärdet är lika med summan av alla mätvärden dividerad med antalet atomer.)
 - d) Hur stor andel av atomerna passerar en apparat som bara släpper genom atomer i tillståndet $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |-1\rangle)$?

- 4) En elektron befinner sig i ett magnetfält B som pekar i z -riktningen. Låt $|+\rangle$ vara det tillstånd där elektronen har spinn upp mätt i z -riktningen och $|-\rangle$ det tillstånd där elektronen har spinn ner mätt i z -riktningen. Med dessa beteckningar ges Hamiltons matris H av $H_{++} = \mu_B B$, $H_{+-} = H_{-+} = 0$, $H_{--} = -\mu_B B$, där $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}$ är *Bohrmagnetonen*. Antag att elektronen vid tiden $t = 0$ befinner sig i tillståndet $\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$. I vilket tillstånd befinner sig elektronen vid tiden t ? (4p)
- 5) En partikel med massan m som rör sig längs en linje befinner sig i en parabolisk potential, $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ (ω är en konstant). Partikelns vågfunktion har formen $\phi(x) = ae^{-bx^2}$. Bestäm konstanterna a och b samt partikelns energi. Skissa också sannolikhetstätheten som en funktion av x . (Ledning: $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-cx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$.)

KVANTFYSIKENS PRINCIP 2 C K15 LÖSNINGAR

①



$\langle x | i \rangle$ amplituden för att elektronen skall gå från värd i till detektor x

$\langle i | i \rangle$ amplituden för att elektronen skall gå från värd i till värd i .

a) De inget väl observeras för sannolikheten P genom att först addera de fyra amplituderna

$$P = \left| \sum_{i=1}^4 \langle x | i \rangle \langle i | S \rangle \right|^2$$

b) Då man observerar om elektronen passerat värd 1 eller 2 (men ej vilket av dem) för sannolikheten som en summa av två sannolikheter

$$P = \left| \sum_{i=1}^2 \langle x | i \rangle \langle i | S \rangle \right|^2 + \left| \sum_{i=3}^4 \langle x | i \rangle \langle i | S \rangle \right|^2$$

② Se 980121 problem 2.

③ $| \psi \rangle = \frac{1}{2} | 11 \rangle + \frac{1}{2} | 10 \rangle + \frac{1}{2} | 1-1 \rangle$

a) $\langle 2 | \psi \rangle = \left(\langle 11 | \frac{1}{2} + \langle 01 | \frac{1}{2} + \langle -1 | \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} | 11 \rangle + \frac{1}{2} | 10 \rangle + \frac{1}{2} | 1-1 \rangle \right)$
 $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$

där vi använt $\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$

b) Andelen av atomerna som har $S_z = 0$ är

$$\frac{|\langle 0 | \psi \rangle|^2}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{1}{4}$$

c) Medelvärdet $\bar{S}_z$ av S_z är

$$\bar{S}_z = \frac{1}{4} \hbar + \frac{1}{4} \cdot 0 \hbar + \frac{1}{4} (-\hbar) = -\frac{1}{4} \hbar$$

d) Andelen atomer som passerar apparaten är

$$|\langle \phi | \psi \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{8} (3 - 2\sqrt{2})$$

$$\langle \phi | \psi \rangle = \langle 2 | \psi \rangle = 1$$

④ Låt $|A(t)\rangle$ vara elektronens tillstånd vid tiden t .

$$|A(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

Efterom $H_{+-} = H_{-+}$ så är $|+\rangle$ och $|-\rangle$ stationära tillstånd med energier $E_+ = H_{++} = \mu_B B$ respektive $E_- = H_{--} = -\mu_B B$. Stationära tillstånd kan tidshandla

$$|e^{-\frac{i}{\hbar} E_+ t} |+\rangle \text{ resp. } e^{-\frac{i}{\hbar} E_- t} |-\rangle$$

Om vi använder detta får vi

$$|A(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \mu_B B t} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i}{\hbar} \mu_B B t} |-\rangle$$

Alltså $\langle A(t) | A(t) \rangle = C_+(t) \langle + | + \rangle + C_-(t) \langle - | - \rangle$

och lös elektronens (se formelsamlingen)

$$\begin{cases} i\hbar \frac{dC_+}{dt} = \mu_B B C_+ \\ i\hbar \frac{dC_-}{dt} = -\mu_B B C_- \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_+(t) = C_+(0) e^{-\frac{i}{\hbar} \mu_B B t} \\ C_-(t) = C_-(0) e^{\frac{i}{\hbar} \mu_B B t} \end{cases}$$

$$t=0 \text{ ger } C_+(0) = C_-(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore |A(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \mu_B B t} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i}{\hbar} \mu_B B t} |-\rangle$$

⑤

En partikels rörelse längs en linje bestäms av Schrödingers ekv., en formel som:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \phi(x) = E \phi(x) \quad (1)$$

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

Vägfunktionen har formen $\phi(x) = a e^{-bx^2}$ och partikeln har en bestämd energi E .

Sätt in $\phi(x)$ i (1):

$$\frac{d\phi}{dx} = -2abx e^{-bx^2} = -2bx \phi(x)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -2ab e^{-bx^2} + 4ab^2 x^2 e^{-bx^2} = [-2b + 4b^2 x^2] \phi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} (-2b + 4b^2 x^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right] \phi(x) = E \phi(x)$$

Detta ska gälla för alla x om och endast om

$$\begin{cases} 2\frac{\hbar^2}{m} b + \frac{1}{2} m \omega^2 = 0 \\ E = \frac{\hbar^2 b^2}{m} \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{m\omega}{2\hbar} \\ E = \frac{1}{2} \hbar \omega \end{cases}$$

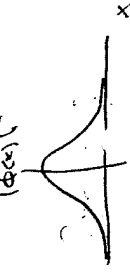
$$a \text{ bestäms ur } 1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2bx^2} dx = a^2 \sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$

$$a = \left(\frac{2b}{\pi} \right)^{1/4} = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4}$$

$$\text{Svar: Energi är } E = \frac{1}{2} \hbar \omega$$

$$a = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4}, \quad b = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

För sannolikhetstheten b se figur



FORMELSAMLING – KVANTFYSIKENS PRINCIPER

Får användas på tentamen. Ingen annan formelsamling får användas.

$$E = \hbar\omega \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (1)$$

$$\Delta x \Delta p_x \approx h \quad (2)$$

$$f(\theta) \pm f(\pi - \theta) \quad (3)$$

$$\langle i|j \rangle = \delta_{ij} \quad (4)$$

$$\langle \chi|\phi \rangle = \sum_i \langle \chi|i \rangle \langle i|\phi \rangle \quad (5)$$

$$\langle \phi|\chi \rangle = \langle \chi|\phi \rangle^* \quad (6)$$

$$\sum_i |i \rangle \langle i| = 1 \text{ (eller } |) \quad (7)$$

$$\langle \chi|A|\phi \rangle = \sum_{i,j} \langle \chi|i \rangle \langle i|A|j \rangle \langle j|\phi \rangle \quad (8)$$

$$|\phi \rangle = \sum_i |i \rangle \langle i|\phi \rangle = \sum_i |i \rangle c_i \quad (9)$$

$$\langle \phi| = \sum_i \langle \phi|i \rangle \langle i| = \sum_i c_i^* \langle i| \quad (10)$$

$$|\psi \rangle = A|\phi \rangle = \sum_{i,j} |i \rangle \langle i|A|j \rangle \langle j|\phi \rangle \quad (11)$$

$$\sum_i |c_i|^2 = 1 \quad (12)$$

$$i\hbar \frac{dc_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}c_j(t) \quad (13)$$

$$H_{ij}^* = H_{ji} \quad (14)$$

$$H_{11} = H_{22} = E_0 \quad H_{12} = H_{21} = -A \quad (15)$$

$$c_1(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \quad (16)$$

$$c_2(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \quad (17)$$

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|\psi\rangle dx \quad (18)$$

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi\rangle \quad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (20)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x, t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} \quad (21)$$

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\phi(x) \quad (22)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\phi(x) = E\phi(x) \quad (23)$$

$$\phi(x) = a\sin(kx) + b\cos(kx), \quad k = \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2} \quad \text{om } E > V_0 \quad (24)$$

$$\phi(x) = ae^{\kappa x} + be^{-\kappa x}, \quad \kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2} \quad \text{om } E < V_0 \quad (25)$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34} Js, \quad e = 1.60 \times 10^{-19} C \quad (26)$$

$$m_{elektron} = 9.11 \times 10^{-31} kg, \quad m_{proton} = m_{neutron} = 1.67 \times 10^{-27} kg \quad (27)$$

$$1 \text{ \AA} = 10^{-10} m, \quad 1 eV = 1.60 \times 10^{-19} J \quad (28)$$