

Tentamen i Kvantfysikens Principer 020119 13-18

Tillåtna hjälpmedel: fomelsamling och miniräknare. Var noga med att motivera dina lösningar! Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.

Lycka till! *Anders Karlhede*

- 1) Beskriv kortfattat dubbelspaltexperimentet för elektroner. Var noga med att få med vad som skiljer detta experiment från vad man enligt klassisk fysik skulle vänta sig för dubbelspaltexperiment med a) kulor och b) vågor.
- 2) Hur lyder Heisenbergs osäkerhetsrelation för en partikel som rör sig längs en linje? Förklara noga vad relationen innebär, gärna med ett exempel.
- 3) I ett experiment skjuts partiklar från en källa S mot en skärm med tre hål. Ge ett uttryck för sannolikheten för att observera en partikel i en punkt x på en andra skärm bakom den första om:
 - a) Inget av hålen observeras.
 - b) Ett av hålen observeras så att man vet om en partikel har passerat genom detta hål eller inte.
- 4)
 - a) Förklara skillnaden på fermioner och bosoner.
 - b) Är elektroner bosoner eller fermioner?
 - c) Förklara varför elektronernas "statistik" (dvs om de är fermioner eller bosoner) är viktig för atomernas struktur och periodiska systemet. Vad skulle hänt om elektronerna haft den motsatta statistiken?
- 5) Ett stort antal identiska partiklar med spinn ett befinner sig i tillståndet $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$ där $|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle$ betecknar de tillstånd där spinnets komponent i z -riktningen är $s_z = \hbar, 0, -\hbar$. Man mäter s_z .
 - a) Beskriv hur man kan göra denna mätning (tex genom att kortfattat beskriva en apparat som mäter s_z).
 - b) För hur stor andel av partiklarna finner man $s_z = -\hbar$?

- c) Betrakta de partiklar för vilka man finner $s_z = -\hbar$. I vilket tillstånd befinner sig dessa *efter* mätningen?
- 6) Betrakta en elektron som befinner sig i en endimensionell låda med längden $10 \text{ \AA}$, dvs en elektron som rör sig i potentialen $V(x) = 0$ om $0 < x < 10 \text{ \AA}$ och $V = \infty$ för övrigt.
- a) Bestäm vågfunktionen och energin för de två lägsta energitillstånden.
- b) Var är sannolikheten störst, respektive minst, att finna elektronen i vart och ett av de två tillstånden? Motivera svaret, tex genom att förklara vågfunktionens fysikaliska betydelse.

FORMELSAMLING – KVANTFYSIKENS PRINCIPER

Får användas på tentamen.

$$E = \hbar\omega \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (1)$$

$$\Delta x \Delta p_x \approx h \quad (2)$$

$$f(\theta) \pm f(\pi - \theta) \quad (3)$$

$$\langle i|j \rangle = \delta_{ij} \quad (4)$$

$$\langle \chi|\phi \rangle = \sum_i \langle \chi|i \rangle \langle i|\phi \rangle \quad (5)$$

$$\langle \phi|\chi \rangle = \langle \chi|\phi \rangle^* \quad (6)$$

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = 1 \text{ (eller } |) \quad (7)$$

$$\langle \chi|A|\phi \rangle = \sum_{i,j} \langle \chi|i \rangle \langle i|A|j \rangle \langle j|\phi \rangle \quad (8)$$

$$|\phi \rangle = \sum_i |i\rangle \langle i|\phi \rangle = \sum_i |i\rangle c_i \quad (9)$$

$$\langle \phi| = \sum_i \langle \phi|i \rangle \langle i| = \sum_i c_i^* \langle i| \quad (10)$$

$$|\psi \rangle = A|\phi \rangle = \sum_{i,j} |i\rangle \langle i|A|j \rangle \langle j|\phi \rangle \quad (11)$$

$$\sum_i |c_i|^2 = 1 \quad (12)$$

$$i\hbar \frac{dc_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij} c_j(t) \quad (13)$$

$$H_{ij}^* = H_{ji} \quad (14)$$

$$H_{11} = H_{22} = E_0 \quad H_{12} = H_{21} = -A \quad (15)$$

$$c_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \quad (16)$$

$$c_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \quad (17)$$

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x|\psi\rangle dx \quad (18)$$

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi\rangle \quad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (20)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (21)$$

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \phi(x) \quad (22)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right] \phi(x) = E\phi(x) \quad (23)$$

$$\phi(x) = a \sin(kx) + b \cos(kx) , \quad k = \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2} \quad \text{om } E > V_0 \quad (24)$$

$$\phi(x) = a e^{\kappa x} + b e^{-\kappa x} , \quad \kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2} \quad \text{om } E < V_0 \quad (25)$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34} Js , \quad e = 1.60 \times 10^{-19} C \quad (26)$$

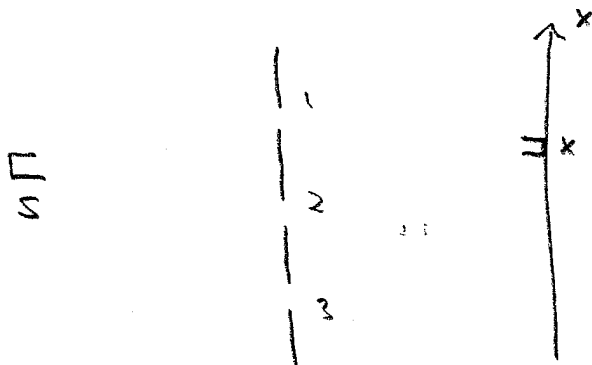
$$m_{elektron} = 9.11 \times 10^{-31} kg , \quad m_{proton} = m_{neutron} = 1.67 \times 10^{-27} kg \quad (27)$$

$$1 \text{ \AA} = 10^{-10} m , \quad 1 eV = 1.60 \times 10^{-19} J \quad (28)$$

① Se Feynman.

② Se Feynman

③



$\langle x|i \rangle$ amplituden för att elektronen skall gå från hål i till detektor i x

$\langle i|s \rangle$ amplituden för att elektronen skall gå från källan S till hål i

a) Då inget hål observeras är amplituden A för att elektronen skall gå från S till x summan av amplituderna för de tre vägarna. Sannolikheten är $P = |A|^2$:

$$P = \left| \sum_{i=1}^3 \langle x|i \rangle \langle i|s \rangle \right|^2$$

3b) Om hål 1 observeras så får sannolikheter som en summa av två sannolikheter, en för att elektronen går via hål 1 och en för att den inte gör det;

$$P = |\langle x|1\rangle\langle 1|s\rangle|^2 + \left|\sum_{i=2}^3 \langle x|i\rangle\langle i|s\rangle\right|^2$$

④ a) Om $f(\theta)$ är amplituden för spridning av två partiklar vinkeln θ (i masscentrumssystemet) så är totala amplituden för spridning av identiska partiklar

$$f(\theta) + f(\pi - \theta) \quad \text{för bosoner}$$

$$f(\theta) - f(\pi - \theta) \quad \text{för fermioner}$$

b) Elektroner är fermioner.

c) Eftersom elektronerna är fermioner kan bara en elektron vara i varje tillstånd i atomen. Detta leder till atomernas elektronskal och periodiska systemet. Om elektronerna vore bosoner så skulle alla vara i det lägsta tillståndet.

som har lägst energi. De olika atomerna skulle då vara ganska lika varandra

— den periodicitet som syns i periodiska systemet skulle inte finnas.

⑤

a) Spinnets komponent S_z kan mätas utia en Stern-Gerlach apparat där ett inhomogent magnetfält får partiklar med olika S_z att följa olika banor

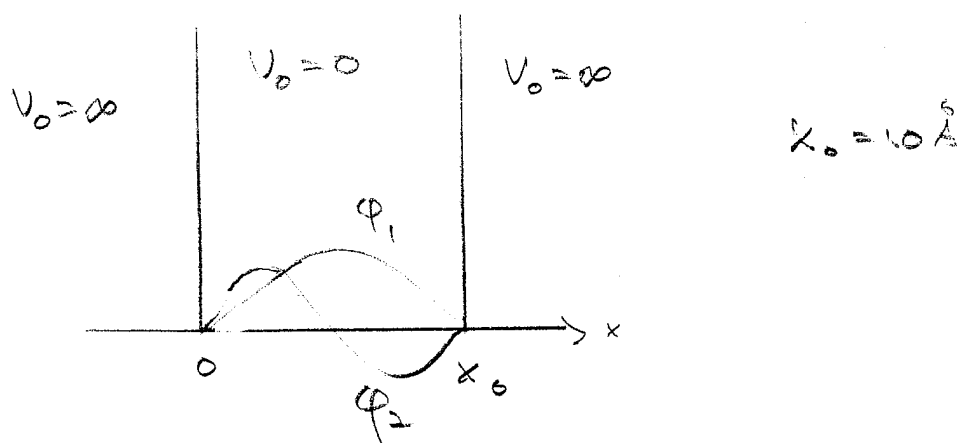
b) Andelen av partiklarna som har $S_z = -\hbar/2$ ges av

$$| \langle -1/2 \rangle |^2 = \frac{1}{2}$$

$$(\text{ty } \langle 1/2 \rangle = 1)$$

c) Efter mätningen befinner sig dessa partiklar i tillståndet $|-\rangle$.

⑥



a) Entligt formelsamlingen

$$\begin{cases} \varphi(x) = a \sin kx + b \cos kx, & k = \sqrt{2mE}/\hbar \quad 0 < x < x_0 \\ \varphi(x) = 0 & x < 0, x > x_0 \end{cases}$$

 φ kontinuerlig:

$$\varphi(0) = \varphi(x_0) = 0 \Rightarrow b = 0; \quad kx_0 = u\pi \quad u = 1, 2, \dots$$

$$\text{Energin: } E_u = \frac{\hbar^2 k_u^2}{2m} = u^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m x_0^2} \quad u = 1, 2, \dots$$

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m x_0^2} = \frac{1,05^2 \cdot 10^{-68} \text{ J}^2}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 10^2 \cdot 10^{-20}} \frac{\text{J}^2 \text{ s}^2}{\text{kg m}^2} = 0,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_2 = 4 \cdot E_1 = 2,4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

De två lägsta energitillstånden är:

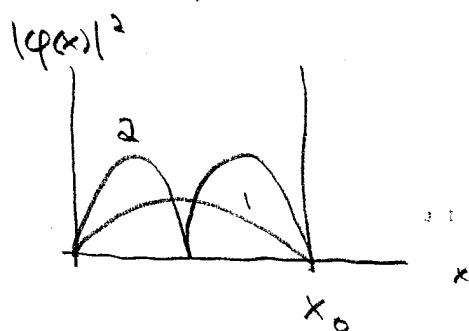
$$\varphi_1(x) = \begin{cases} a \sin \frac{\pi x}{10 \text{ Å}} & 0 < x < x_0 \\ 0 & x < 0, x > x_0 \end{cases} \quad E_1 = 0,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} a \sin \frac{2\pi x}{10 \text{ Å}} & 0 < x < x_0 \\ 0 & x < 0, x > x_0 \end{cases} \quad E_2 = 2,4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

5. (a bestäms av $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1$)

Låtta ges av $a = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{Å}^{-1/2}$)

b) Samolikheten P att finna partikeln i x ges av $|\varphi(x)|^2$:



Figuren visar att för E_1 är
P störst i $x = x_0/2 = 5 \text{Å}$ och
minst i $x \leq 0$, $x \geq x_0 = 10 \text{Å}$.

För E_2 är

P störst i $x = x_0/4 = 2,5 \text{Å}$ och $x = \frac{3x_0}{4} = 7,5 \text{Å}$
och minst i $x \leq 0$, $x \geq x_0 = 10 \text{Å}$ samt i $x = \frac{x_0}{2} = 5 \text{Å}$.

