

Tentamen Kvantfysikens principer

18.00 - 22.00 , 18/12 2003

Hjälpmedel: Miniräknare samt bifogad formelsamling.

Var noga med att tydligt redovisa uträkningar och att ge motiveringar till alla svar (om inget annat sägs i uppgiften).

Maxpoäng är 36 p. För godkänt krävs minst 18 p, och för väl godkänt minst 27 p.

1. En elektronkälla placeras framför en dubbelspalt, och på en skärm bakom dubbelspalten erhålls ett interferensmönster. Ange för vart och ett av påståendena nedan om de är korrekta eller felaktiga. Inga motiveringar krävs. (Varje deluppgift ger 1 poäng för rätt svar, -1 poäng för fel svar, och 0 poäng för inget svar. Uppgiften som helhet kan *inte* ge negativ poäng, och maximalt 4 p.)
 - (a) Om man ökar avståndet mellan springorna i dubbelspalten så blir avståndet mellan två på varandra följande maxima i interferensmönstret större.
 - (b) Om man ökar elektronernas rörelsemängd blir avståndet mellan två på varandra följande maxima i interferensmönstret större.
 - (c) Om källans intensitet minskar, så att endast en elektron åt gången sänds ut och passerar dubbelspalten så försvinner interferensmönstret.
 - (d) Om man på något sätt observerar vilket hål som varje elektron passerar så försvinner interferensmönstret.
2. En bunden partikel måste ha en kinetisk energi som är större än noll. Förklara hur detta följer ur Heisenbergs osäkerhetsrelation. (2 p)
3. En stråle av elektroner som alla befinner sig i spinttillståndet $|+\rangle_z$ (spinn upp i z -led) leds vidare in i en eller flera Stern-Gerlach apparater orienterade och blockerade enligt nedan. Hur stor del av elektronerna kommer ut i respektive fall? Ge korta motiveringar till dina svar. (OBS: Se formelsamlingen!)

$$(a) \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\}_{\hat{x}} \quad (1 \text{ p})$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\}_{\hat{x}} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\}_{\hat{z}} \quad (2 \text{ p})$$

$$(c) \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\}_{\hat{x}} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\}_{\hat{z}} \quad (2 \text{ p})$$

- (d) Jämför och kommentera resultaten i (b) och (c). Vilken allmän kvantmekanisk effekt är det som illustreras? (2 p)

4. Betrakta en partikel i en oändlig potentialgrop med bredd L som befinner sig i tillståndet

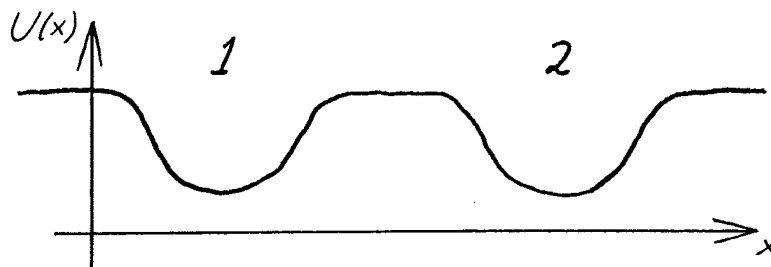
$$|\chi\rangle = A \left(2|1\rangle - |2\rangle + \frac{i}{2}|3\rangle + |4\rangle \right)$$

där $|n\rangle$ betecknar det n :te energitillståndet.

(OBS: Deluppgifterna kan besvaras och ge poäng oberoende av varandra.)

- Normera tillståndet, d v s bestäm A , och förklara betydelsen av att göra detta. (3 p)
- Vad är sannolikheten att vid en energimätning finna att partikelns energi är större än $5E$, där E betecknar energin för grundtillståndet $|1\rangle$? (3 p)
- Antag att man mäter energin och får resultatet $4E$. Vad är sannolikheten att man vid en positionsmätning därefter finner att partikeln befinner sig mitt i lådan inom ett intervall med bredden $0,1 \cdot L$? (Tips: du kan behöva använda att $(\sin \alpha)^2 = (1 - \cos 2\alpha)/2$.) (4 p)

5. En partikel befinner sig i en potential bestående av två "gropar", 1 och 2 :



(Man kan till exempel tänka på partikeln som en elektron, och på potentialgroparna som två atomkärnor som elektronen kan vara vid.) Om man startar med partikeln i grop 1 visar det sig att den efter 10 sekunder – men inte kortare – alltid återfinns i grop 2.

(OBS: Deluppgifterna kan besvaras och ge poäng oberoende av varandra.)

- Beskriv utfallet av en lägesbestämning av partikeln (m a p grop 1 eller 2) efter 15 respektive 20 sekunder. (2 p)
- Säg att partikeln vid en viss tidpunkt befinner sig i grop 1 och att man då mäter dess energi. Beskriv de möjliga utfallen. Hur mycket skiljer de sig åt? (3 p)
- Vad kan man säga om partikelns position *efter* energimätningen? (1 p)
- Gör grova skisser av vågfunktionens utseende för de två lägsta energitillstånden och ange vilket som är vilket. (2 p)

6. Förklara kortfattat innebörden i följande begrepp. (5 p)

- Paulis uteslutningsprincip
- Stationärt tillstånd
- Boson
- Vågfunktion
- Bastillstånd

LITEN FORMELSAMLING

Partiklar – vågor

$$\begin{aligned}E &= \hbar\omega & \omega &= 2\pi\nu \\ \mathbf{p} &= \hbar\mathbf{k} & k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar\end{aligned}$$

Kvantformalism

$$\begin{aligned}\langle i|j\rangle &= \delta_{ij} \\ |\phi\rangle &= \sum_i |i\rangle \langle i|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle C_i \\ \sum_i |C_i|^2 &= 1 \\ \langle \phi|\chi\rangle &= \langle \chi|\phi\rangle^* \\ \sum_i |i\rangle \langle i| &= 1 \text{ (eller } \mathbb{I}) \\ \langle \chi|A|\phi\rangle &= \sum_{i,j} \langle \chi|i\rangle \langle i|A|j\rangle \langle j|\phi\rangle\end{aligned}$$

Spinn 1/2

$$|+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_x + |-\rangle_x)$$

$$|-\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|+\rangle_x + |-\rangle_x)$$

där $|+\rangle_z$ betecknar spinn upp tillståndet m a p z-axeln, etcetera.

Tidsutveckling

$$i\hbar \frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j(t)$$

Specialfall:

Två bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$$|\Phi\rangle_t = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$$

$$C_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

Energitillstånden:

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 + A$$

$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 - A$$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{d\psi(x, t)}{dt}$$

$$\psi_E(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$$

Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_{\text{proton}} = m_{\text{neutron}} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

1. a) Fel
b) Fel
c) Fel
d) Rätt

2. Antag att den kinetiska energin $K=0$ för en partikel.

$$K = \frac{mv^2}{2} = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow p = mv = 0$$

$$\Rightarrow \Delta p = 0$$

Men enligt osäkerhetsrelationen $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$ måste då

$$\Delta x = \infty$$

d v s partikelns läge är fullständigt obestämt.

Men i så fall är partikeln inte bunden.

Alltså måste $K > 0$ för en bunden partikel.

3. a) $|+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x + |-\rangle_x)$

Sannolikheten för passage är $|\langle + | + \rangle_z|^2 = \frac{1}{2}$

b) Inga partiklar kommer igenom. En SG-apparat med alla kanaler öppna gör ingen skillnad, och

$$\langle - | + \rangle_z = 0$$

(forts)

1/10/13)

3. c) Ur $\hat{x}$ -apparaten $+$ -kanal kommer enligt a) hälften ut. Deras tillstånd är då $|+\rangle_x$. Amplituden för att dessa ska passera $\hat{z}$ -apparaten $-$ -kanal är

$$\langle -1+ \rangle_x = (\langle +1- \rangle_z)^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{ur formelsamlingen})$$

$$|\langle -1+ \rangle_x|^2 = \frac{1}{2}$$

Sammantaget passerar $\frac{1}{4}$ båda apparaterna.

- d) I c) kommer fler partiklar igenom än i b), trots att färre vägar är öppna. I b) finns två möjliga vägar. Amplituderna för dessa interfererar och släcker ut varandra.

$$4. |\chi\rangle = A(2|1\rangle - |2\rangle + \frac{i}{2}|3\rangle + |4\rangle)$$

- a) Summan av alla amplituders belopp i kvadrat måste vara 1, eftersom sannolikheten för något utfall, vilket som helst, är 1.

$$\text{D v s: } \sum_i |\langle i|\chi\rangle|^2 = 1$$

Detta bestämmer A . (Vi kan anta att A är reell.)

$$1 = 4A^2 + A^2 + \frac{A^2}{4} + A^2 = A^2(6 + \frac{1}{4}) = \frac{25}{4}A^2$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{5}$$

Alltså:

$$|\chi\rangle = \frac{4}{5}|1\rangle - \frac{2}{5}|2\rangle + \frac{i}{5}|3\rangle + \frac{2}{5}|4\rangle$$

4. b) $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2} = En^2$ där $E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$

Energin $> 5E \Rightarrow$ De aktuella tillstånden är $|3\rangle$ och $|4\rangle$.

$$P(\text{Energi} > 5E) = P_3 + P_4 = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

c) $4E$ motsvarar tillståndet $|2\rangle$

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi x}{L}$$

$$P = \int_{\frac{L}{2} - 0,05L}^{\frac{L}{2} + 0,05L} |\psi_2(x)|^2 dx = \frac{2}{L} \int \sin^2 \frac{2\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int \left(\frac{1 - \cos \frac{4\pi x}{L}}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{L} \left[x - \frac{L}{4\pi} \sin \frac{4\pi x}{L} \right]_{\frac{L}{2} - 0,05L}^{\frac{L}{2} + 0,05L} = \dots =$$

$$= 0,1 - \frac{1}{2\pi} \sin(0,55 \cdot 4\pi) \approx \underline{\underline{0,00645}}$$

5. a) Ur uppgiften framgår att det tar 10 s för partikeln att tunnla från grop 1 till grop 2.

Efter 20 s måste den då ha tunnlat tillbaka till grop 1, så vid en lägesbestämning av partikeln vid denna tid så kommer den alltså alltid att hittas där.

Efter 15 s är det lika sannolikt att hitta den i grop 1 som i grop 2.

b) Tillståndet $|I\rangle$ är en superposition av energitillstånden $|I\rangle$ och $|II\rangle$:

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I\rangle + |II\rangle)$$

Tillstånden $|I\rangle$ och $|II\rangle$ motsvarar energierna $E_0 + A$ respektive $E_0 - A$, och dessa mätvärden kommer alltså erhållas med lika sannolikhet.

Skillnaden mellan dem är $2A$. Vad är A ?

Formelsamlingen $\Rightarrow$

$$\begin{cases} C_1(t) = \frac{a}{2} e^{-i(E_0 - A)t/\hbar} + \frac{b}{2} e^{-i(E_0 + A)t/\hbar} \\ C_2(t) = \frac{a}{2} e^{-i(E_0 - A)t/\hbar} - \frac{b}{2} e^{-i(E_0 + A)t/\hbar} \end{cases}$$

$$\text{Initialt är } \begin{cases} C_1(0) = 1 \\ C_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Efter tiden $t_0 = 10$ s har vi $C_1(t_0) = 0$

$$\Rightarrow e^{-i(E_0 - A)t_0/\hbar} + e^{-i(E_0 + A)t_0/\hbar} = 0$$

$$e^{-iE_0 t_0/\hbar} 2 \cos \frac{At_0}{\hbar} = 0 \Rightarrow \frac{At_0}{\hbar} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Så energiskillnaden är } 2A = \frac{\pi \hbar}{t_0} \approx 0,33 \cdot 10^{-34} \text{ J}$$

(forts)

5. c) Efter energimätningen befinner sig partikeln i tillstånd $|I\rangle$ eller $|II\rangle$, d v s i en superposition av $|1\rangle$ och $|2\rangle$. Sannolikheten är lika att hitta den i grop 1 och i grop 2.

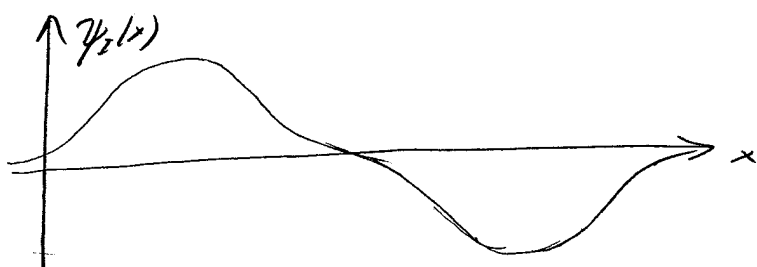
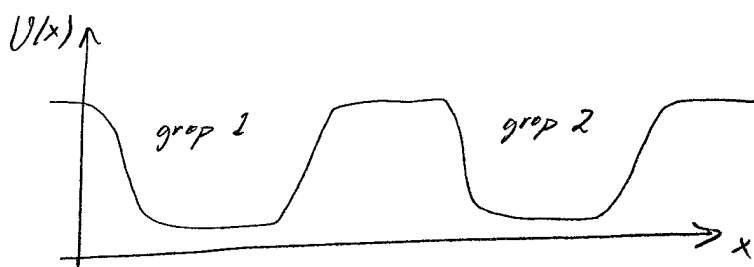
d) Ur formelsamlingen:

$$\begin{cases} |I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \\ |II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \end{cases}$$

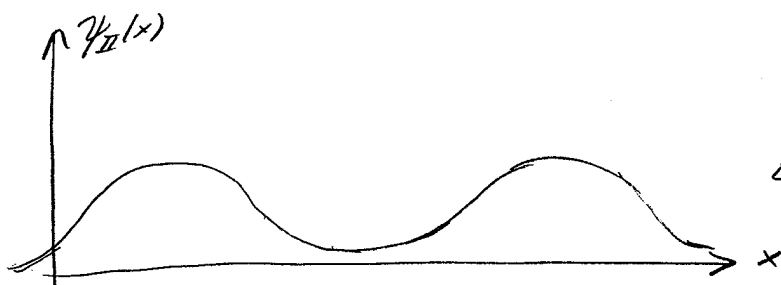
$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_I(x) = \langle x | I \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle x | 1 \rangle - \langle x | 2 \rangle) \\ \psi_{II}(x) = \langle x | II \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle x | 1 \rangle + \langle x | 2 \rangle) \end{cases}$$

där $\langle x | 1 \rangle = \psi_1(x)$, vågfunktionen för partikel i grop 1
och $\langle x | 2 \rangle = \psi_2(x)$, vågfunktionen för partikel i grop 2.

Så $\psi_I(x)$ och $\psi_{II}(x)$ bör se ut ungefär så här:



Energi $E_0 + A$



Energi $E_0 - A$

6. a) Två fermioner (av samma slag) kan aldrig befinna sig i exakt samma kvantmekaniska tillstånd.

b) Ett stationärt tillstånd har välbestämd energi E . Alla amplituder i ett sådant tillstånd har samma tidsutveckling, nämligen $e^{-iEt/\hbar}$

c) I en process med två bosoner interfrererar de två amplituderna (som motsvarar utbyte av partiklarna) med ett $+$ -tecken. Det innebär att det blir mer sannolikt att hitta bosonerna i samma tillstånd.

Bosoner har heltaligt spinn.

d) Vågfunktionen är amplituden att hitta en partikel i en viss punkt i rummet: $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$. Sannolikheten att hitta partikeln inom ett litet intervall Δx är

$$P(x, \Delta x) \approx |\psi(x)|^2 \Delta x$$

e) Bastillstånd är en fullständig uppsättning tillstånd $|i\rangle$ för vilka

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$$

gäller. Ett godtyckligt tillstånd är en superposition av bastillstånden.