

Tentamen Kvantfysikens principer

9.00 - 13.00 , 17/1 2004

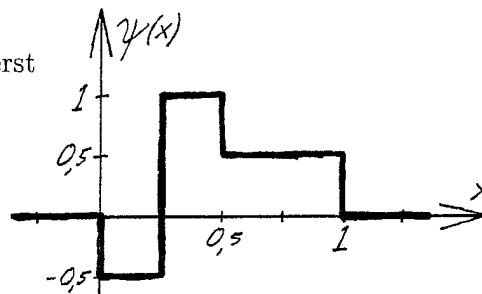
Hjälpmedel: Miniräknare samt bifogad formelsamling.

Det framgår ur respektive uppgift när en fullständig lösning eller ett resonemang ska presenteras, och när endast ett svar krävs.

Maxpoäng är 36 p. För godkänt krävs minst 18 p, och för väl godkänt minst 27 p.

- Man har mätt upp hastigheten hos en elektron till $3,6 \cdot 10^6$ m/s, med noggrannheten $\pm 0,05 \cdot 10^6$ m/s. Hur väl kan man som bäst känna till elektronens position, d v s hur utsmetad är elektronen minst? (2 p)
 - Förklara kvalitativt, gärna genom att rita, hur man kan förstå Heisenbergs osäkerhetsrelation som en följd av att "partiklar" måste beskrivas som vågor. (2 p)

- En elektron beskrivs av den reella (och ytterst ofysikaliska) vågfunktionen $\Psi(x)$, som ges i diagrammet.



- Hur förhåller sig sannolikheten att hitta elektronen i intervallet $0,25 < x < 0,5$, till sannolikheten att hitta den i intervallet $0,5 < x < 0,75$? (1 p)
 - Rita upp den normerade sannolikhetsfördelningen för att hitta elektronen i olika positioner! (3 p)
- Vilka av följande påståenden är korrekta och vilka är felaktiga? (Varje deluppgift ger 1 poäng för rätt svar, -1 poäng för fel svar, och 0 poäng för inget svar. Uppgiften som helhet kan *inte* ge negativ poäng, och maximalt 5 p.)
 - Kärnan Uran-235, som består av 92 protoner och 143 neutroner, är en fermion.
 - En stråle av bosoner delar upp sig i ett jämnt antal möjliga strålar om den leds in i en Stern-Garlach apparat.
 - Två protoner kan aldrig återfinnas i exakt samma kvantmekaniska tillstånd.
 - I ett experiment med två Helium-4 kärnor är sannolikheten att de ska återfinnas i samma sluttillstånd dubbelt så stor som om samma experiment utförs med den ena kärnan utbytt mot en Helium-3 kärna.
 - I ett experiment med två Helium-3 kärnor är sannolikheten att de ska återfinnas i samma sluttillstånd dubbelt så stor som om samma experiment utförs med den ena kärnan utbytt mot en Helium-4 kärna.

4. En elektron befinner sig i spinn-tillståndet

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (|+\rangle_z + 2|-\rangle_z)$$

- (a) Vad är sannolikheten att vid en mätning av $|\Phi\rangle$ -elektronens spinn i z -led finna den i tillståndet $|+\rangle_z$? (1 p)
- (b) Vad är sannolikheten att vid en mätning av $|\Phi\rangle$ -elektronens spinn i x -led finna den i tillståndet $|+\rangle_x$? (Tips: använd formelsamlingen!) (2 p)
- (c) Elektronen i tillståndet $|\Phi\rangle$ sänds genom Stern-Gerlach apparaterna (från vänster till höger)

$$\begin{array}{cc} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \\ \hat{z} & \hat{x} \end{array}$$

Vad är sannolikheten att den kommer igenom? (2 p)

- (d) Elektronen i tillståndet $|\Phi\rangle$ sänds genom Stern-Gerlach apparaterna (från vänster till höger)

$$\begin{array}{cc} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \\ \hat{x} & \hat{z} \end{array}$$

Vad är sannolikheten att den kommer igenom? (2 p)

5. Redogör kortfattat för dubbelspaltförsöket med elektroner. I vilket avseende uppför sig elektronerna som vågor i experimentet, och i vilket uppför de sig som partiklar? (4 p)

6. En partikel i en oändlig potentialgrop med bredd L befinner sig i ett visst ögonblick i superpositionstillståndet

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |3\rangle)$$

- (a) Beskriv resultatet av en energimätning på tillståndet. Vilka värden kan man få, hur sannolika är de, och vad kan man säga om tillståndet efter mätningen? (3 p)
- (b) Gör skisser av hur sannolikhetsfördelningen varierar i rummet för tillstånden $|1\rangle$, $|3\rangle$ respektive $|\chi\rangle$. (3 p)
- (c) Beskriv kvalitativt vad som kommer att hända med dessa sannolikhetsfördelningar när tiden går. (Du behöver alltså inte räkna ut något i denna uppgift.) (3 p)

7. Redogör kortfattat för förhållandet mellan Schrödinger-ekvationen och den tidsberoende Schrödinger-ekvationen. Vad skiljer ekvationerna, och vad beskriver lösningarna till respektive ekvation? (3 p)

LITEN FORMELSAMLING

Partiklar – vågor

$$\begin{aligned}E &= \hbar\omega & \omega &= 2\pi\nu \\ \mathbf{p} &= \hbar\mathbf{k} & k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar\end{aligned}$$

Kvantformalism

$$\begin{aligned}\langle i|j\rangle &= \delta_{ij} \\ |\phi\rangle &= \sum_i |i\rangle \langle i|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle C_i \\ \sum_i |C_i|^2 &= 1 \\ \langle \phi|\chi\rangle &= \langle \chi|\phi\rangle^* \\ \sum_i |i\rangle \langle i| &= 1 \text{ (eller } |) \\ \langle \chi|A|\phi\rangle &= \sum_{i,j} \langle \chi|i\rangle \langle i|A|j\rangle \langle j|\phi\rangle\end{aligned}$$

Spinn 1/2

$$\begin{aligned}|+\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_x + |-\rangle_x) \\ |-\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-|+\rangle_x + |-\rangle_x) \\ \text{där } |+\rangle_z &\text{ betecknar spinn upp tillståndet m a p } z\text{-axeln, etcetera.}\end{aligned}$$

Tidsutveckling

$$i\hbar \frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j(t)$$

Specialfall:

Two bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$$|\Phi\rangle_t = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$$

$$C_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

Energitillstånden:

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 + A$$

$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 - A$$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{d\psi(x, t)}{dt}$$

$$\psi_E(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \psi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$$

Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_{\text{proton}} = m_{\text{neutron}} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$1. a) v = 3,6 \cdot 10^6 \text{ m/s} \quad \Delta v = 0,1 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\Rightarrow \Delta p = m_e \Delta v = 9,11 \cdot 10^{-26}$$

Heisenbergs osäkerhetsrelation $\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$

$$\Rightarrow \Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta p} \approx 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

b) Ett vågpaket 

som har väldefinierad våglängd är utspritt över ett stort område. Extremfallet är en ren sinusvåg som har $\Delta x = \infty$ och $\Delta \lambda = 0$.

Om flera sinusvågor, med våglängder i ett litet våglängdsintervall $\Delta \lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ adderas erhålls ett vågpaket med stor utsträckning Δx .

litet $\Delta \lambda \longleftrightarrow$ stor Δx

stor $\Delta \lambda \longleftrightarrow$ litet Δx

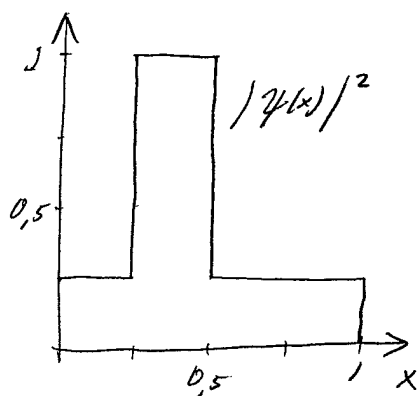
Eftersom $p = \frac{h}{\lambda}$ så får man en motsvarande osäkerhetsrelation mellan Δx och Δp .

2. a) $P \sim |\psi(x)|^2$

Eftersom $|\psi(x)|^2_{0,25 < x < 0,5} = 2 |\psi(x)|^2_{0,5 < x < 0,75}$

så blir sannolikheten att hitta elektronen i intervallet $0,25 < x < 0,5$ fyra gånger större.

b,



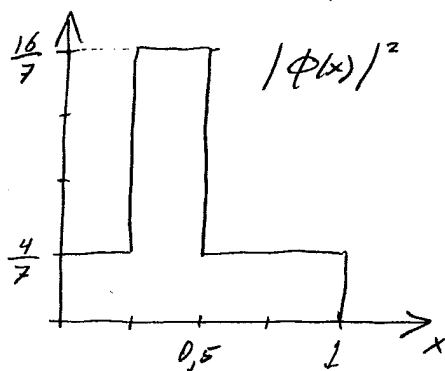
Arean under grafen $= \frac{7}{16}$

Vi söker normerad funktion

$\phi(x) = A\psi(x)$ sådan att
arean under $|\phi(x)|^2 = A^2 |\psi(x)|^2$
är likamed 1

$$\Rightarrow A^2 = \frac{16}{7}$$

Den normerade fördelningen blir alltså:



- 3.
- a) Rätt
 - b) Fel
 - c) Rätt
 - d) Rätt
 - e) Fel

$$4. |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (|+\rangle_z + 2|-\rangle_z)$$

a) Sannolikheten är $\frac{1}{5}$ (Beloppet i kvadrat av koef. framför $|+\rangle_z$)

$$b) \begin{cases} |+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_x + |-\rangle_x) \\ |-\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|+\rangle_x + |-\rangle_x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_z + 2|-\rangle_z) = \dots = \frac{1}{\sqrt{10}} (-|+\rangle_x + 3|-\rangle_x)$$

Så sannolikheten är $\frac{1}{10}$ (Beloppet i kvadrat av koef. framför $|+\rangle_x$)

c) Sannolikheten för passage genom $\hat{z}$ -apparaten är $\frac{1}{5}$.
Om elektronen passerar denna befinner den sig därefter i tillståndet $|+\rangle_z$. För en sådan elektron är sannolikheten $\frac{1}{2}$ för passage genom en $\hat{x}$ -apparat med $+$ -kanalen öppen.

Sammantaget blir sannolikheten $\frac{1}{10}$

d) Ett resonemang motsvarande det i c) ger sannolikheten

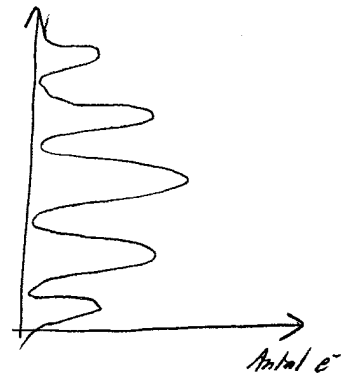
$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$$

~~~~~

5.

e-källa  
Dubbel-  
spalt

Skärm



Om endast ett av hålen är öppna erhålls inget interferensmönster på skärmen, men om båda hålen är öppna får man interferens (som i diagrammet ovan), även om bara en  $e^-$  åt gången passerar spalten.

Således måste varje enskild elektron i någon mening passera båda hålen. I detta avseende uppför sig elektronen som en våg.

Å andra sidan sätter varje elektron ett distinkt avtryck på skärmen. I detta avseende uppför den sig som en partikel.

$$6. \quad |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |3\rangle)$$

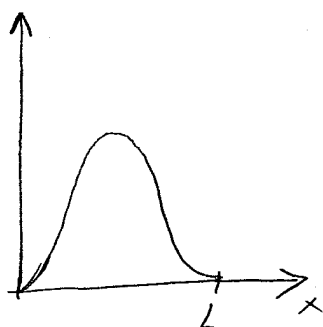
a) Vid en energimätning erhålls med lika sannolikhet resultaten  $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$  och  $E_3 = 9E_1$ ,

Efter mätningen befinner sig partikeln i det tillstånd som svarar mot den erhållna energin, alltså  $|1\rangle$  eller  $|3\rangle$ .

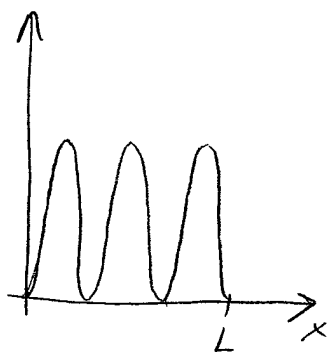


(forts b)

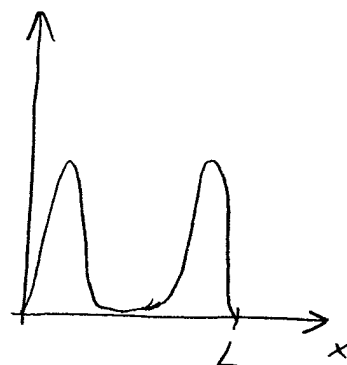
b)



$$|\psi_1(x)|^2$$



$$|\psi_3(x)|^2$$



$$|\psi_2(x)|^2 =$$

$$= |\psi_1(x) + \psi_3(x)|^2$$

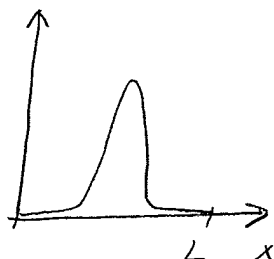
c)  $|1\rangle$  och  $|3\rangle$  är energitillstånd, vilket innebär att tidsutvecklingen bara utgörs av en komplex fas  $e^{-iEt/\hbar}$ , där  $E = E_1$  respektive  $E_3$ .

Eftersom  $|e^{-iEt/\hbar}|^2 = 1$  så händer ingenting med sannolikhetsfördelningen för dessa tillstånd när tiden går.

Tidsutvecklingen för  $|2\rangle$  är

$$|2\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle e^{-iE_1 t/\hbar} + |3\rangle e^{-iE_3 t/\hbar})$$

Eftersom fasen för  $|1\rangle$  och  $|3\rangle$  förändras sig med olika fart så kommer de snart vara i motfas med varandra. Sannolikhetsfördelningen blir då



När tiden går pendlar den mellan detta utseende och det i uppgift b).

7. Lösningar till Schrödinger-ekvationen ger rums- och tidsberoendet för vågfunktionen för en partikel som befinner sig i en given potential  $V(x)$ .

Om man i S.-ekvationen sätter in lösningar på formen

$$\psi_E(x, t) = e^{-iEt/\hbar} \psi(x)$$

(alltså stationära lösningar, svarande mot en viss energi  $E$ )

så kan tidsberoendet förkortas bort och man får den tidsoberoende S.-ekvationen. Dess lösningar ger alltså rumsberoendet  $\psi(x)$  för tillstånd med välbestämd energi.