

# Tentamen Kvantfysikens principer

18.00 - 22.00 , 16/12 2004

Hjälpmedel: Miniräknare samt bifogad formelsamling.

Var noga med att tydligt redovisa uträkningar och att ge motiveringar till alla svar (om inget annat sägs i uppgiften).

Maxpoäng är 36 p. För godkänt krävs minst 18 p, och för väl godkänt minst 27 p.

1. Låt  $|n\rangle$  beteckna energitillstånden för en partikel i en oändlig potentialgrop med bredd  $L$ . Det vill säga:

$$\langle x|n\rangle = \Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

i intervallet  $0 < x < L$ .

- (a) Skriv ner ett normerat tillstånd för vilket gäller att man vid mätning av partikelns energi erhåller värdet  $E_1$  i 75% av fallen och värdet  $E_2$  i 25% av fallen. (2 p)
  - (b) Skriv ner ett normerat tillstånd för vilket gäller att energierna  $E_1$  och  $E_3$  erhålls lika ofta, samt att partikeln med störst sannolikhet återfinns nära gropens mitt. (2 p)
2. Besvara följande frågor kortfattat. Svaret behöver maximalt vara ett par meningar, och ofta räcker några få ord.
- (a) I det innersta skalet i en atom får blott två elektroner plats. Vad skiljer dessa åt? (1 p)
  - (b) Vad kallas den princip som gör att det inte får plats fler elektroner i det innersta skalet, och hur lyder dess allmänna formulering? (2 p)
  - (c) Uppfyller en komplex planvåg Heisenbergs osäkerhetsrelation, och i så fall på vilket sätt (d v s vad är  $\Delta x$  och  $\Delta p$ ) ? (1 p)
  - (d) Vilken aspekt av dubbelspaltexperimentet med elektroner tyder på att elektronen är en våg? Vilken aspekt av experimentet tyder på att elektronen är en partikel? (2 p)
  - (e) Hur vet man om en sammansatt partikel (till exempel en atomkärna) är en fermion eller en boson? (1 p)
  - (f) Schrödinger-ekvationen är linjär. Vad är innebörden i detta? (1 p)
  - (g) Ett så kallat energitillstånd skiljer sig från andra tillstånd i två viktiga avseenden. Vilka? (1 p)

3. Här är amplituderna för en spinn-1 partikel i ett av de tre möjliga x-spinn-tillstånden ( $|+x\rangle$ ,  $|0x\rangle$  och  $|-x\rangle$ ) att återfinnas i ett av de tre möjliga z-spinn-tillstånden ( $|+z\rangle$ ,  $|0z\rangle$  och  $|-z\rangle$ ):

$$\begin{aligned}\langle +z|+x\rangle &= \frac{1}{2} & \langle +z|0x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \langle +z|-x\rangle &= \frac{1}{2} \\ \langle 0z|+x\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & \langle 0z|0x\rangle &= 0 & \langle 0z|-x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle -z|+x\rangle &= \frac{1}{2} & \langle -z|0x\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & \langle -z|-x\rangle &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- (a) Uttryck tillståndet  $|+x\rangle$  som en superposition av z-spinn-tillstånden. (1 p)  
 (b) Vad är sannolikheten att en partikel i  $|+x\rangle$  tillståndet väljer noll-kanalen i en SG-apparat orienterad i z-led? (1 p)  
 (c) En partikel i tillståndet  $|+x\rangle$  sänds in i en SG-apparat orienterad i z-led med alla vägar öppna, följd av en SG-apparat i x-led med endast minus-kanalen öppen. Så här alltså:

$$|+x\rangle \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\}_{\hat{z}} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\}_{\hat{x}}$$

Hur stor andel kommer igenom? Redovisa kortfattat hur du resonerar. (2 p)

- (d) Noll-kanalen i z-apparaten blockeras:

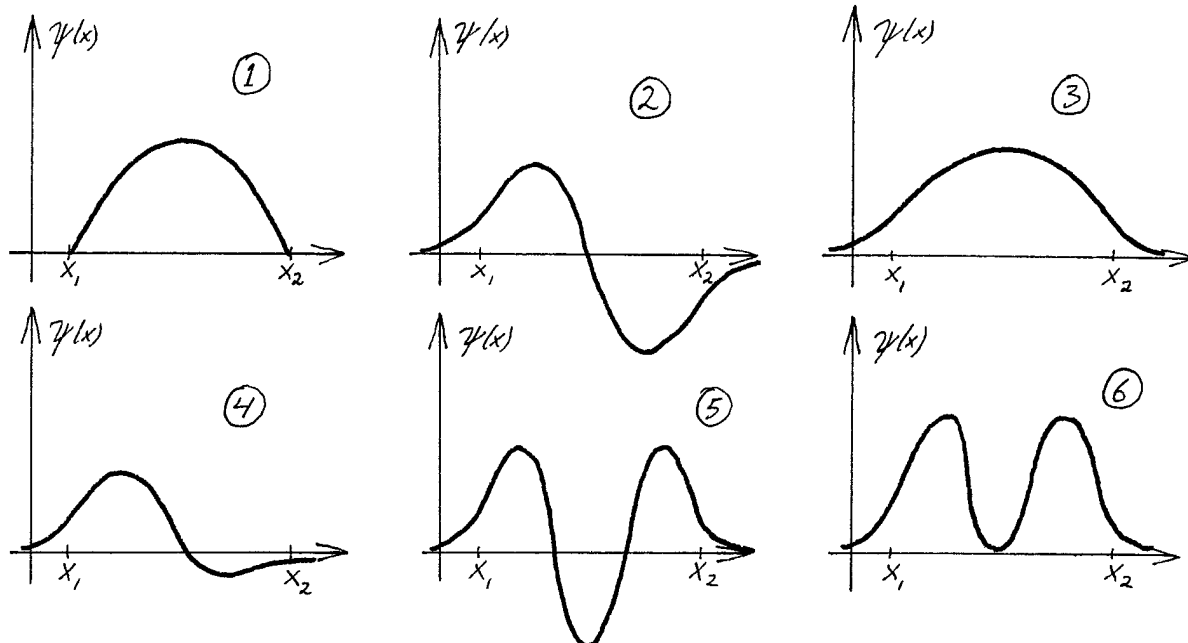
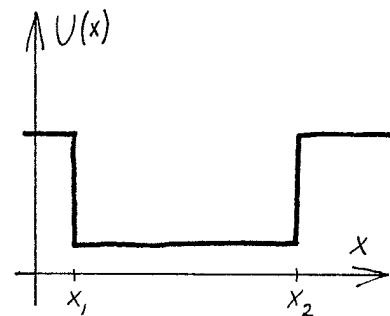
$$|+x\rangle \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\}_{\hat{z}} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \end{array} \right\}_{\hat{x}}$$

Hur stor andel kommer nu igenom? Redovisa kortfattat hur du resonerar. (2 p)

4. Vilka av följande påståenden är korrekta och vilka är felaktiga? (Varje deluppgift ger 1 poäng för rätt svar, -1 poäng för fel svar, och 0 poäng för inget svar. Uppgiften som helhet kan *inte* ge negativ poäng, och maximalt 5 p.)

- (a) En proton som rör sig snabbt har kortare våglängd än en proton som rör sig långsamt.  
 (b) Ju större massa ett objekt har desto större är dess våglängd.  
 (c) Två fotoner kan aldrig återfinnas i exakt samma kvantmekaniska tillstånd.  
 (d) I ett experiment med två Helium-4 kärnor är sannolikheten att de ska återfinnas i samma sluttillstånd hälften så stor som om samma experiment utförs med två Helium-3 kärnor i stället.  
 (e) I ett experiment med två Helium-4 kärnor är sannolikheten att de ska återfinnas i samma sluttillstånd dubbelt så stor som om samma experiment utförs med den ena kärnan utbytt mot en Helium-3 kärna.

5. (a) Vilka av vågfunktionerna nedan är lösningar till den tidsoberoende Schrödinger-ekvationen med potentialfunktionen till höger? (1 p)
- (b) Ordna de vågfunktioner som du angav i (a) efter stigande energi, samt rita upp hur vågfunktionen för närmast högre energitillstånd bör se ut. (2 p)
- (c) Förklara för var och en av funktionerna som du *inte* angav i (a) vad det är som diskvalificerar dem som lösningar till den tidsoberoende Schrödinger-ekvationen. (2 p)



6. En partikel kan befinna sig i två olika lägen, 1 och 2. Motsvarande tillstånd betecknar vi  $|1\rangle$  respektive  $|2\rangle$ . Partikeln har två olika energitillstånd,

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle)$$

$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle)$$

med energi  $E_I$  respektive  $E_{II}$ . Om man startar med partikeln i tillstånd  $|1\rangle$  tar det tiden  $\tau$  tills den har tunnlat över och helt säkert återfinns i tillstånd  $|2\rangle$ . Betrakta en partikel som vid tiden  $t = 0$  befinner sig i tillståndet

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (2|1\rangle + |2\rangle)$$

- (a) Vad är resultatet av en mätning av partikelns läge vid  $t = 0$ ? (1 p)
- (b) Vad är resultatet av en mätning av partikelns energi vid  $t = 0$ ? (2 p)
- (c) Vad är resultatet av en mätning av partikelns läge vid tiden  $\tau$ ? (2 p)
- (d) Vad är resultatet av en mätning av partikelns energi vid tiden  $\tau$ ? (2 p)



# LITEN FORMELSAMLING

## Partiklar – vågor

$$E = \hbar\omega \qquad \omega = 2\pi\nu$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

## Kvantformalism

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$$

$$|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i | \phi \rangle = \sum_i |i\rangle C_i$$

$$\sum_i |C_i|^2 = 1$$

$$\langle \phi | \chi \rangle = \langle \chi | \phi \rangle^*$$

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = 1 \text{ (eller } | \rangle \langle | \text{)}$$

$$\langle \chi | A | \phi \rangle = \sum_{i,j} \langle \chi | i \rangle \langle i | A | j \rangle \langle j | \phi \rangle$$

## Spinn 1/2

$$|+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} ( |+\rangle_x + |-\rangle_x )$$

$$|-\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} ( -|+\rangle_x + |-\rangle_x )$$

där  $|+\rangle_z$  betecknar spinn upp tillståndet m a p z-axeln, etcetera.

## Tidsutveckling

$$i\hbar \frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j(t)$$

Specialfall:

Två bastillstånd,  $H_{11} = H_{22} = E_0$  och  $H_{12} = H_{21} = -A$

$$|\Phi\rangle_t = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$$

$$C_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

Energitillstånden:

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ( |1\rangle - |2\rangle ) \qquad \text{energi } E_0 + A$$

$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ( |1\rangle + |2\rangle ) \qquad \text{energi } E_0 - A$$

## Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{d\psi(x, t)}{dt}$$

$$\psi_E(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(x)$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

## Oändlig potentialgrop

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$$

## Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_{\text{proton}} = m_{\text{neutron}} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

# LÖSNINGAR TILL TENTAMEN

## KVANTFYSIKENS PRINCIPER 16/12 -04

---

1. a)  $|n\rangle$  beräknar tillståndet med energi  $E_n$

Vi söker tillstånd  $|\phi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$

där

$$|a|^2 = \frac{3}{4}$$

$$|b|^2 = \frac{1}{4}$$

Så till exempel:  $|\phi\rangle = \frac{1}{2}(\sqrt{3}|1\rangle + |2\rangle)$

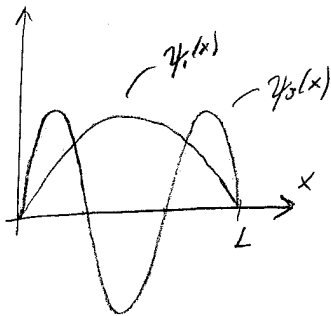
b) Vi söker tillstånd  $|\phi\rangle = a|1\rangle + b|3\rangle$

där

$$|a|^2 = |b|^2 = \frac{1}{2}$$

Betrakta

$$\phi(x) = \langle x|\phi\rangle = a\langle x|1\rangle + b\langle x|3\rangle = a\psi_1(x) + b\psi_3(x)$$



Partikeln återfinns mest sannolikt nära gropens mitt om vi subtraherar dessa från varandra.

Alltså:  $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |3\rangle)$

2. a) De två elektronerna har motsatt spinn: en har t ex spinn-upp, och den andra spinn-ner.

b) Paulis uteslutningsprincip:

TVå fermioner (av samma slag) kan aldrig befinna sig i samma kvantmekaniska tillstånd.

c) Komplex planvåg:  $e^{i(kx - \omega t)}$ ,  $p = \hbar k$

En partikel som beskrivs av denna har välbestämd rörelsemängd ( $\Delta p = 0$ ) och fullständigt obestämt läge ( $\Delta x = \infty$ ). I den meningen kan man säga att den uppfyller Heisenbergs osäkerhetsrelation.

d) Att man får ett interferensmönster på skärmen tyder på att elektronen är en våg. Att varje enskild elektron trots detta alltid dyker upp på ett enda välbestämt ställe på skärmen tyder på att elektronen är en partikel.

e) En atomkärna som består av ett udda antal nukleoner (fermioner) är en fermion. En som består av ett jämnt antal nukleoner är en bason.

f) Om man har två lösningar till S.-ekvationen så är summan av dem också en lösning. Superpositioner av tillstånd som är lösningar är alltså också lösningar.

g) Ett energitillstånd har

1) välbestämd energi

2) ett reellt tidsberoende:  $e^{-iEt/\hbar}$

Tillståndet är stationärt - inga sannolikheter ändrar sig i tiden.



$$3. a) |+\rangle = \langle+z|+\rangle|+z\rangle + \langle 0z|+\rangle|0z\rangle + \langle-z|+\rangle|-z\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}|+z\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0z\rangle + \frac{1}{2}|-z\rangle$$

$$b) |\langle 0z|+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Så sannolikheten är 50%

c) En SG-apparat med alla vägar öppna förändrar inte tillståndet. Eftersom

$$\langle -x|+\rangle = 0$$

så kommer inga igenom.

Alternativ: Addera amplituderna för de tre vägarna:

$$\begin{aligned} &\langle -x|+z\rangle\langle +z|+\rangle + \\ &+ \langle -x|0z\rangle\langle 0z|+\rangle + \\ &+ \langle -x|-z\rangle\langle -z|+\rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

d) Addera amplituderna för de två vägarna:

$$\begin{aligned} &\langle -x|+z\rangle\langle +z|+\rangle + \\ &+ \langle -x|-z\rangle\langle -z|+\rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Så andelen  $|\frac{1}{2}|^2 = \frac{1}{4}$  kommer nu igenom.

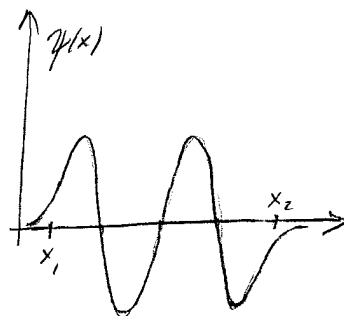
4. a) Rätt b) Fel c) Fel d) Fel e) Rätt

5. a) Vågfunktion 2, 3 och 5 är lösningar.

b) Stigande energi: 3, 2, 5

Dessa motsvarar de tre lägsta energinivåer.

Vågfunktionen för fjärde energinivån:



c) ①: Gör till noll direkt vid  $x_1$  och  $x_2$ .  
Så kan det bara vara om potentialen  
blir oändlig där.

④: Detta kan vara superpositionsstillståndet  
av 2 och 3. Det är i så fall en lösning  
till fulla Schrödingerekvationen, men inte  
till den tidsberoende.

⑥: Detta är sannolikhetsstätheten till 2.  
Den blir dessutom "konkav" med avseende på  
 $x$ -axeln mitt i gropen.

6.  $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|1\rangle + |2\rangle)$  vid  $t=0$

a)  $P(\text{läge 1}) = \left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right|^2 = \frac{4}{5}$

$P(\text{läge 2}) = \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|^2 = \frac{1}{5}$

b)  $\begin{cases} |I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle) \\ |II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I\rangle + |II\rangle) \\ |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|I\rangle + |II\rangle) \end{cases}$

Utryck  $|\phi\rangle$  i energitillstånden  $|I\rangle$  och  $|II\rangle$ :

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2|1\rangle + |2\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}(|I\rangle + |II\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-|I\rangle + |II\rangle)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}}(|I\rangle + 3|II\rangle) \end{aligned}$$

Alltså:  $P(E_I) = \frac{1}{10}$

$P(E_{II}) = \frac{9}{10}$

c) Vi vet att  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  och  $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$  under tiden  $\tau$ .

Så  $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|1\rangle + |2\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(2|2\rangle + |1\rangle)$  (Så när som på total komplex fns)

Alltså:  $P(\text{läge 1}) = \frac{1}{5}$

$P(\text{läge 2}) = \frac{4}{5}$

d) Resultatet blir samma som i b), dvs sannolikheterna  $\frac{1}{10}$  respektive  $\frac{9}{10}$  för  $E_I$  respektive  $E_{II}$ .

Detta eftersom energitillstånden är stationära.

Man kan även se det genom att uttrycka

$|\phi\rangle_\tau = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|2\rangle + |1\rangle)$  i  $|I\rangle$  och  $|II\rangle$ .

