

Tentamen Kvantfysikens principer

18.00 - 22.00 , 15/12 2005

Hjälpmedel: Miniräknare samt bifogad formelsamling.

Var noga med att tydligt redovisa uträkningar och att ge motiveringar till alla svar (om inget annat sägs i uppgiften).

Maxpoäng är 36 p. För godkänt krävs minst 18 p, och för väl godkänt minst 27 p.

1. En elektron befinner sig i spinn-tillståndet

$$|\Phi\rangle = A(|+\rangle_z - 2|-\rangle_z)$$

där $|+\rangle_z$ och $|-\rangle_z$ betecknar tillstånden spinn upp respektive spinn ner med avseende på z -axeln.

- (a) Normera tillståndet $|\Phi\rangle$, dvs bestäm konstanten A . Beskriv även betydelsen av att normera ett tillstånd. (2 p)
- (b) Vad är sannolikheten att vid en mätning av $|\Phi\rangle$ -elektronens spinn i z -led finna den i tillståndet $|+\rangle_z$ respektive $|-\rangle_z$? (2 p)
- (c) Elektronen i tillståndet $|\Phi\rangle$ sänds genom en Stern-Gerlach apparat orienterad i $\hat{x}$ -led, och med minus-kanalen blockerad:

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \\ \hat{x}$$

Vad är sannolikheten att den kommer igenom? (2 p)

- (d) Elektronen i tillståndet $|\Phi\rangle$ sänds genom Stern-Gerlach apparaterna (från vänster till höger)

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} \\ \hat{x} \quad \hat{z}$$

Vad är sannolikheten att den kommer igenom? (2 p)

2. En atom måste ha en viss minsta storlek: elektronerna i skalet kan inte vara begränsade till att vara endast i atomkärnan. Förklara hur detta följer ur Heisenbergs osäkerhetsrelation. (3 p)
3. Betrakta en oändligt djup potentialgrop med bredd L . Vi väljer som vanligt potentialen till noll i gropens botten. Säg att vi har fem stycken elektroner på en gång i gropen. Vad är det minsta möjliga värdet på den totala energin för de fem elektronerna? (Bortse från den elektriska växelverkan mellan elektronerna.) Förklara hur du resonerar: nämn relevanta egenskaper hos elektronerna, samt eventuella principer som du måste använda dig av. (3 p)

4. En partikel kan finna sig i två olika lägen, 1 och 2. Motsvarande tillstånd betecknar vi $|1\rangle$ respektive $|2\rangle$. Partikeln har två olika energitillstånd,

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle)$$

$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle)$$

med energi E_I respektive E_{II} . Om man startar med partikeln i tillstånd $|1\rangle$ tar det tiden τ tills den har tunnlat över och helt säkert återfinns i tillstånd $|2\rangle$. (Ingen motivering behövs i deluppgift (a) - (d).)

- (a) Man startar partikeln i läge 2 och efter tiden τ mäter man dess position. Vad blir utfallet av mätningen? (1 p)
- (b) Man startar partikeln i läge 2 och efter tiden τ mäter man dess energi. Vad blir utfallet av mätningen? (1 p)
- (c) Man startar partikeln i energitillstånd $|I\rangle$ och efter tiden τ mäter man dess position. Vad blir utfallet av mätningen? (1 p)
- (d) Partikeln befinner sig i energitillstånd $|I\rangle$. Man mäter dess position och finner att den befinner sig i läge 1. Vad blir utfallet om man *därefter* mäter dess energi? (1 p)
- (e) Partikeln befinner sig i tillståndet

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2}|I\rangle + i|II\rangle)$$

Beskriv utfallet av en mätning av dess position. (2 p)

- (f) Är tillståndet i deluppgift (e) stationärt eller ej? Motivera ditt svar! (2 p)

5. Två helium-4 kärnor (bestående av två protoner och två neutroner) med lika spinn skickas rakt mot varandra med samma fart. De kolliderar och byter färdriktning, d v s sprids. Upprepade försök visar att sannolikheten är P för att de ska spridas 90° ut från den ursprungliga färdriktningen. (Ingen motivering krävs i (a) och (b).)

- (a) En av helium-4 kärnorna byts ut mot en helium-3 kärna (bestående av två protoner och en neutron). Vad är nu sannolikheten för spridning 90° , uttryckt i P (förutsatt att kärnornas utgångshastigheter anpassas så att de efter kollisionen alltid kommer att röra sig rakt från varandra). (1 p)
- (b) Vad blir sannolikheten för spridning 90° om båda kärnorna byts ut mot helium-3? (1 p)
- (c) Vad är anledningen till att spridningssannolikheten blir olika beroende på vilka partiklar man använder? Ge en kortfattad förklaring som anknyter till de olika fallen ovan. (3 p)

6. (a) Skissera utseendet hos vågfunktionen för de tre lägsta energitillstånden för en partikel i en oändlig potentialgrop. (2 p)
- (b) Skissera sannolikheten (d v s sannolikhetstätheten) att hitta partikeln i olika punkter för dessa tre tillstånd. (2 p)
- (c) Förklara hur man experimentellt kan skilja mellan tillstånden

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle)$$

och

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle)$$

($|n\rangle$ betecknar här tillståndet för den n :te energinivån) (2 p)

7. Redogör kortfattat för förhållandet mellan Schrödinger-ekvationen och den tids-oberoende Schrödinger-ekvationen. Vad skiljer ekvationerna, och vad beskriver lösningarna till respektive ekvation? (3 p)

LITEN FORMELSAMLING

Partiklar – vågor

$$\begin{aligned}E &= \hbar\omega & \omega &= 2\pi\nu \\ \mathbf{p} &= \hbar\mathbf{k} & k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar\end{aligned}$$

Kvantformalism

$$\begin{aligned}\langle i|j\rangle &= \delta_{ij} \\ |\phi\rangle &= \sum_i |i\rangle \langle i|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle C_i \\ \sum_i |C_i|^2 &= 1 \\ \langle \phi|\chi\rangle &= \langle \chi|\phi\rangle^* \\ \sum_i |i\rangle \langle i| &= 1 \text{ (eller } |) \\ \langle \chi|A|\phi\rangle &= \sum_{i,j} \langle \chi|i\rangle \langle i|A|j\rangle \langle j|\phi\rangle\end{aligned}$$

Spinn 1/2

$$\begin{aligned}|+\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_x + |-\rangle_x) \\ |-\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-|+\rangle_x + |-\rangle_x) \\ \text{där } |+\rangle_z &\text{ betecknar spinn upp tillståndet m a p z-axeln, etcetera.}\end{aligned}$$

Tidsutveckling

$$i\hbar \frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j(t)$$

Specialfall:

Två bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$$|\Phi\rangle_t = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$$

$$C_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

Energitillstånden:

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 + A$$

$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 - A$$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{d\psi(x, t)}{dt}$$

$$\psi_E(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$$

Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_{\text{proton}} = m_{\text{neutron}} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

① $|\Phi\rangle = A(1+\gamma_z - 2|- \gamma_z\rangle)$

- a) Beloppet i kvadrat av koefficienten framför respektive basstillstånd ger sannolikheten för just det tillståndet. Sannolikheten att vid mätning erhålla något resultat är 1, och alltså måste alla koefficienters belopp i kvadrat summera till 1:

$$|A|^2 + |2A|^2 = 1$$

Antag att A är reell:

$$A^2 + 4A^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

b) $P(+, z) = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \right|^2 = \frac{1}{5}$

$$P(-, z) = \left| \frac{-2}{\sqrt{5}} \right|^2 = \frac{4}{5}$$

c) Ur formelsamlingen: $1+\gamma_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\gamma_x + 1-\gamma_x)$

$$1-\gamma_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\gamma_x + 1-\gamma_x)$$

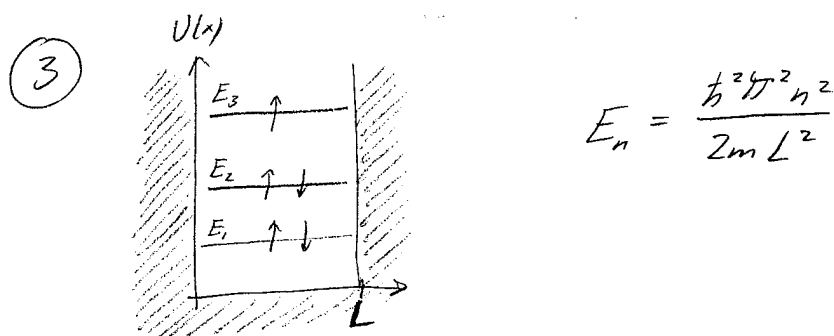
$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1+\gamma_z - 2|- \gamma_z\rangle) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\gamma_x + 1-\gamma_x) - \frac{2}{\sqrt{2}}(-1+\gamma_x + 1-\gamma_x)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}}(3|+\gamma_x\rangle - 1|-\gamma_x\rangle) \end{aligned}$$

Så sannolikheten är $\left| \frac{3}{\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{9}{10}$ att den kommer igenom.

- d) Ur (c) framgår att sannolikheten är $\frac{1}{10}$ att den kommer igenom den första. Gör den det befinner den sig i $1-\gamma_x$ -tillståndet. Då är sannolikheten $\frac{1}{2}$ att den passerar även den andra apparaten.

Total sannolikhet: $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$

- ② Liten atom $\Rightarrow \Delta x$ för elektronerna liten
 $\Rightarrow p$ stor (pga Heisenbergs osäkerhetsrelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$)
 $\Rightarrow p$ stor $\Rightarrow$ Rörelseenergin $K = \frac{p^2}{2m}$ stor
 Är rörelseenergin för stor kan inte elektronen vara bunden till kärnan.



Elektroner är fermioner, vilket innebär att de är underkastade Paulis uteslutningsprincip:

Två elektroner kan aldrig befinnas i samma kvantfysiska tillstånd.

Elektroner har spin $\frac{1}{2}$, vilket innebär att de har två spintillstånd: spin upp och spin ner.

I varje energinivå i grepen får det därför plats två elektroner, som i figuren ovan.

$$\begin{aligned} \text{Total energi } E &= 2E_1 + 2E_2 + E_3 = \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} (2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3^2) = \\ &= \frac{19 \hbar^2 \pi^2}{2m L^2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad \begin{cases} |I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle) & - \text{energi } E_I \\ |II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) & - \text{energi } E_{II} \end{cases}$$

Tunnelstid från $|1\rangle$ till $|2\rangle$: τ

a) Läge 1

b) I 50 % av fallen E_I

I 50 % av fallen E_{II}

$$\left(\text{Eftersom } |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|I\rangle + |II\rangle) \right)$$

c) I 50 % av fallen läge 1

I 50 % av fallen läge 2

d) I 50 % av fallen E_I

I 50 % av fallen E_{II}

$$\left(\text{Eftersom } |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I\rangle + |II\rangle) \right)$$

e) Skriv om i positionsbasen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}|I\rangle + i|II\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle) + \frac{i}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left((\sqrt{2} + i)|1\rangle + (i - \sqrt{2})|2\rangle\right) \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i)}{6} = \frac{1}{2} \quad - \text{Sannolikhet för } |1\rangle$$

$$\left| \frac{i - \sqrt{2}}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{(i - \sqrt{2})(-i - \sqrt{2})}{6} = \frac{1}{2} \quad - \text{Sannolikhet för } |2\rangle$$

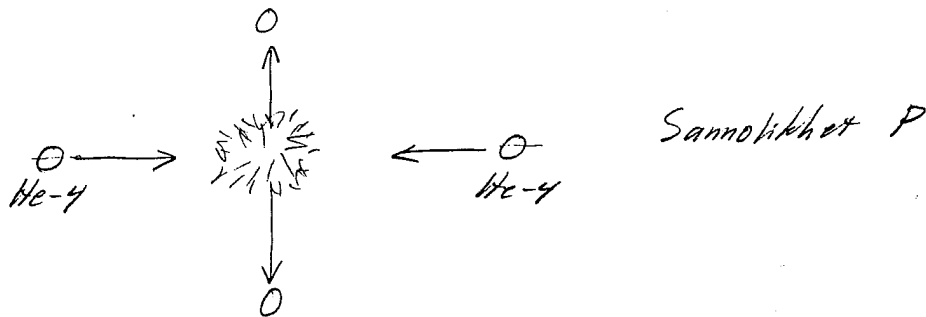
f) Tillståndet är inte stationärt.

Tidsutvecklingen är

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}e^{-iE_I t/\hbar}|I\rangle + ie^{-iE_{II} t/\hbar}|II\rangle\right)$$

Olika komplexa faser framför $|I\rangle$ och $|II\rangle$ gör att exempelvis partiklens läge kommer att variera i tiden.

5

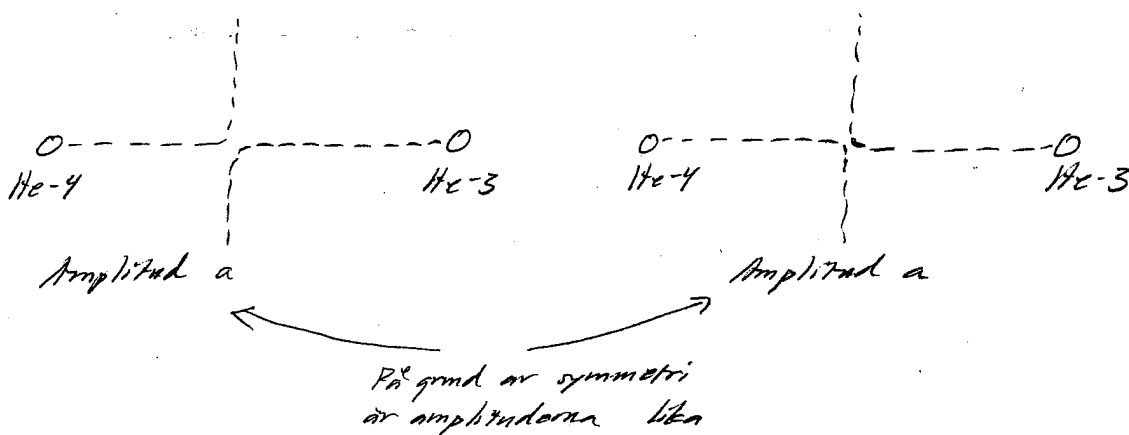


a) Med en He-4 och en He-3 blir sannolikheten $\frac{P}{2}$

b) Med två He-3 blir sannolikheten 0.

c) Amplituderna för de olika sätten kolliisionen kan ske på interfererar med varandra om partiklarna är av samma slag.

Med He-3 och He-4 kan processen ske på två särskiljbara sätt:



$$\text{Sannolikheten blir } |a|^2 + |a|^2 = 2|a|^2$$

Om båda kärnorna är He-4 är de två sätten ovan inte särskiljbara. Amplituderna interfererar med + tecken eftersom det är fråga om bosoner. Sannolikheten blir

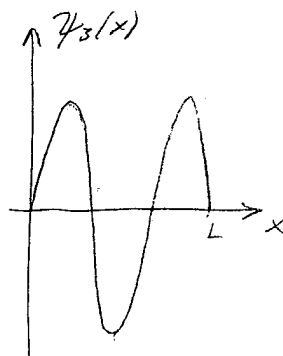
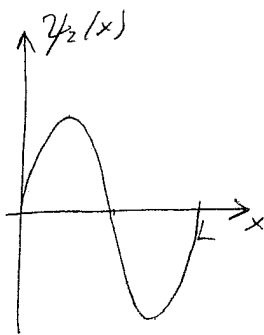
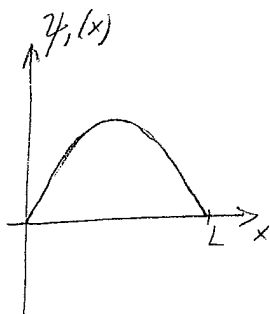
$$|a + a|^2 = |2a|^2 = 4|a|^2$$

Om båda kärnorna är He-3 interfererar amplituderna med - tecken. Sannolikheten blir

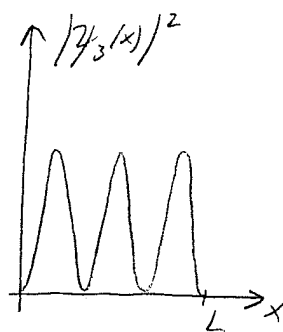
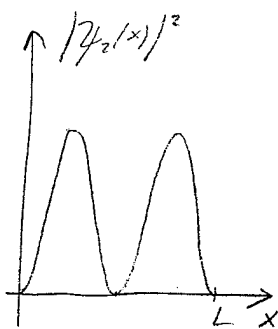
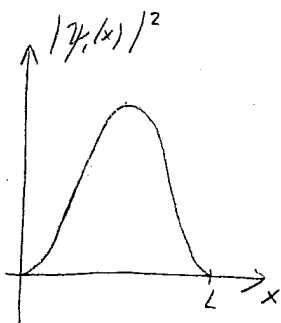
$$|a - a|^2 = 0$$

6

a)



b)



c) Sätt $|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$

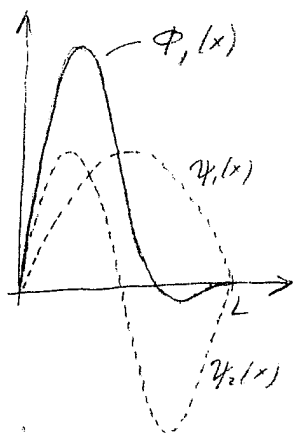
$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$

Motsvarande vågfunktioner blir

$$\Phi_1(x) = \langle x|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle x|1\rangle + \langle x|2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) + \psi_2(x))$$

$$\Phi_2(x) = \langle x|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle x|1\rangle - \langle x|2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) - \psi_2(x))$$

Alltså:



$$\Phi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) - \psi_2(x))$$

blir på motsvarande sätt störst i gränsens högra del.

Så en partikel i $\Phi_1(x)$ återfinns oftast i ledens vänstra del, medan en i $\Phi_2(x)$ oftast återfinns i ledens högra del.

⑦ Lösningar till Schrödinger-ekvationen ger rums-
och tidsberoendet för vågfunktionen för en
partikel som befinner sig i en given potential $V(x)$.

Om man i S.-ekvationen sätter in lösningar
på formen

$$\psi_E(x, t) = e^{-iEt/\hbar} \psi(x)$$

(alltså stationära lösningar, svarande mot en
viss energi E)

så kan tidsberoendet förkortas bort och man
får den tidsoberoende S.-ekvationen. Dess
lösningar ger alltså rumsberoendet $\psi(x)$ för
tillstånd med välbestämd energi.