

Tentamen Kvantfysikens principer

9.00 - 13.00 , 21/1 2006

Hjälpmedel: Miniräknare samt bifogad formelsamling.

Var noga med att tydligt redovisa uträkningar och att ge motiveringar till alla svar (om inget annat sägs i uppgiften).

Maxpoäng är 36 p. För godkänt krävs minst 18 p, och för väl godkänt minst 27 p.

- Man har mätt upp hastigheten hos en elektron till $2,8 \cdot 10^6$ m/s, med noggrannheten $\pm 0,1 \cdot 10^6$ m/s. Hur väl kan man som bäst känna till elektronens position, d.v.s. hur utsmetad är elektronen minst? (2 p)
 - Förklara kvalitativt, gärna genom att rita, hur man kan förstå Heisenbergs osäkerhetsrelation som en följd av att "partiklar" måste beskrivas som vågor. (2 p)
- Här är amplituderna för en spinn-1 partikel i ett av de tre möjliga x-spinn-tillstånden ($|+x\rangle$, $|0x\rangle$ och $|-x\rangle$) att återfinnas i ett av de tre möjliga z-spinn-tillstånden ($|+z\rangle$, $|0z\rangle$ och $|-z\rangle$):

$$\langle +z | +x \rangle = \frac{1}{2} \quad \langle +z | 0x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \langle +z | -x \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle 0z | +x \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \langle 0z | 0x \rangle = 0 \quad \langle 0z | -x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle -z | +x \rangle = \frac{1}{2} \quad \langle -z | 0x \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \langle -z | -x \rangle = \frac{1}{2}$$

- Uttryck tillståndet $|-x\rangle$ som en superposition av z-spinn-tillstånden. (2 p)
- Vad är sannolikheten att en partikel i $|-x\rangle$ tillståndet väljer noll-kanalen i en SG-apparat orienterad i z-led? (1 p)
- Vad är sannolikheten att en partikel i $|+z\rangle$ tillståndet väljer minus-kanalen i en SG-apparat orienterad i x-led? (1 p)
- En partikel i tillståndet $|-x\rangle$ sänds in i en SG-apparat orienterad i z-led med minus-kanalen blockerad, följd av en SG-apparat i x-led med endast minuskanalen öppen. Så här alltså:

$$|-x\rangle \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\}_{\hat{z}} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\}_{\hat{x}}$$

Hur stor andel kommer igenom? Redovisa kortfattat hur du resonerar. (2 p)

3. Redogör kortfattat för dubbelspaltförsöket med elektroner. I vilket avseende uppför sig elektronerna som vågor i experimentet, och i vilket uppför de sig som partiklar? (4 p)

4. Låt $|n\rangle$ beteckna energitillstånden för en partikel i en oändlig potentialgrop med bredd L . Betrakta superpositionstillståndet

$$|\chi\rangle = A (|1\rangle - |3\rangle + 2i|4\rangle)$$

- (a) Normera $|\chi\rangle$, d.v.s. bestäm A . (2 p)
(b) Vilka är de möjliga utfallen av en energimätning på tillståndet $|\chi\rangle$, och med vilka sannolikheter erhålls de? (2 p)
(c) Vad är sannolikheten att finna tillståndet $|\chi\rangle$ i tillståndet

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |4\rangle)$$

(2 p)

- (d) Är $|\chi\rangle$ ett stationärt tillstånd eller ej? Motivera ditt svar! (1 p)

5. Det allmänna problemet med en partikel bunden till en potentialgrop är viktigt både i kvantfysik och i klassisk fysik. Nämn tre egenskaper hos kvantmekaniska bundna tillstånd som är annorlunda jämfört med klassiska. (3 p)

6. Vilka av följande påståenden är korrekta och vilka är felaktiga? (Varje deluppgift ger 1 poäng för rätt svar, -1 poäng för fel svar, och 0 poäng för inget svar. Uppgiften som helhet kan *inte* ge negativ poäng, och maximalt 5 p.)

- (a) Kärnan Järn-56, som består av 26 protoner och 30 neutroner, är en boson.
(b) En stråle av fermioner delar upp sig i ett jämnt antal möjliga strålar om den leds in i en Stern-Gerlach apparat.
(c) Två fotoner kan aldrig återfinnas i exakt samma kvantmekaniska tillstånd.
(d) I ett experiment med två Helium-4 kärnor är sannolikheten att de ska återfinnas i samma sluttillstånd dubbelt så stor som om samma experiment utförs med den ena kärnan utbytt mot en Helium-3 kärna.
(e) I ett experiment med två Helium-3 kärnor är sannolikheten att de ska återfinnas i samma sluttillstånd dubbelt så stor som om samma experiment utförs med den ena kärnan utbytt mot en Helium-4 kärna.

7. Låt $|n\rangle$ beteckna energitillstånd för en partikel i en oändlig potentialgrop med bredd L . Det vill säga:

$$\langle x|n\rangle = \Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

i intervallet $0 < x < L$.

- (a) För vilka av dessa energitillstånd gäller att sannolikheten (eller, rättare sagt, sannolikhetstätheten) är noll att hitta partikeln precis i gropens mitt? (2 p)
- (b) Betrakta tillstånd

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle - |3\rangle)$$

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle + |3\rangle)$$

Gör en grov skiss över vågfunktionerna för dessa båda tillstånd, och ange hur man experimentellt kan skilja mellan dem. (3 p)

- (c) Skriv ner hur tillståndet $|\chi\rangle$ förändrar sig när tiden går, d.v.s. skriv ner $|\chi(t)\rangle$. Uttryck svaret i grundtillståndets energi. (2 p)

LITEN FORMELSAMLING

Partiklar – vågor

$$\begin{aligned}E &= \hbar\omega & \omega &= 2\pi\nu \\ \mathbf{p} &= \hbar\mathbf{k} & k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar\end{aligned}$$

Kvantformalism

$$\begin{aligned}\langle i|j\rangle &= \delta_{ij} \\ |\phi\rangle &= \sum_i |i\rangle \langle i|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle C_i \\ \sum_i |C_i|^2 &= 1 \\ \langle \phi|\chi\rangle &= \langle \chi|\phi\rangle^* \\ \sum_i |i\rangle \langle i| &= 1 \text{ (eller } |) \\ \langle \chi|A|\phi\rangle &= \sum_{i,j} \langle \chi|i\rangle \langle i|A|j\rangle \langle j|\phi\rangle\end{aligned}$$

Spinn 1/2

$$\begin{aligned}|+\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_x + |-\rangle_x) \\ |-\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-|+\rangle_x + |-\rangle_x) \\ \text{där } |+\rangle_z &\text{ betecknar spinn upp tillståndet m a p } z\text{-axeln, etcetera.}\end{aligned}$$

Tidsutveckling

$$i\hbar \frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j(t)$$

Specialfall:

TVå bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$$|\Phi\rangle_t = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$$

$$C_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

Energitillstånden:

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 + A$$

$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 - A$$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{d\psi(x, t)}{dt}$$

$$\psi_E(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \psi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$$

Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_{\text{proton}} = m_{\text{neutron}} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

① a) $v = 2,8 \cdot 10^6 \text{ m/s}$

$$\Delta v = 0,2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\Rightarrow \Delta p = m_e \Delta v \approx 1,82 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$$

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar \Rightarrow \Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta p} \approx 5,76 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

b) Ett vågpaket som har nägorlunda väldefinierad våglängd är utspritt över ett stort område.

Extremfallet är en ren sinusvåg som har $\Delta \lambda = 0$ och $\Delta x = \infty$.

För att erhålla ett vågpaket med liten utsträckning Δx måste sinusvågor inom ett stort våglängdsintervall $\Delta \lambda$ adderas med varandra.

liten $\Delta \lambda \leftrightarrow$ stor Δx

stor $\Delta \lambda \leftrightarrow$ liten Δx

Eftersom $p = \frac{h}{\lambda}$ så får man en motsvarande osäkerhetsrelation mellan Δx och Δp .

② a) $| -x \rangle = | +z \rangle \langle +z | -x \rangle + | 0z \rangle \langle 0z | -x \rangle + | -z \rangle \langle -z | -x \rangle =$
 $= \frac{1}{2} | +z \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} | 0z \rangle + \frac{1}{2} | -z \rangle$

b) $\langle 0z | -x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ sannolikheten $\frac{1}{2}$

c) $\langle -x | +z \rangle = \langle +z | -x \rangle^* = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ sannolikheten $\frac{1}{4}$

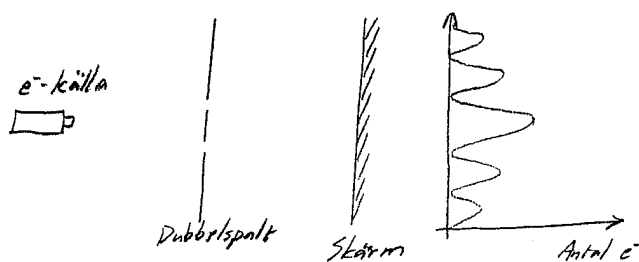
d) Vi har två möjliga vägar: via +-kanalen och via 0-kanalen i $\hat{z}$ -apparaten. Amplituderna för dessa vägar måste adderas för att man ska få den totala amplituden:

$$\langle -x | +z \rangle \langle +z | -x \rangle + \langle -x | 0z \rangle \langle 0z | -x \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Sannolikheten att partikeln kommer igenom blir $\left| \frac{3}{4} \right|^2 = \frac{9}{16}$

③



Om endast ett av hålen är öppna erhålls inget interferensmönster på skärmen, men om båda hålen är öppna får man interferens - även om bara en elektron åt gången passerar spalten.

Varje enskild elektron passerar båda hålen och interfererar med sig själv. I detta avseende uppför elektronen sig som en våg. Å andra sidan sätter varje elektron ett distinkt avtryck på skärmen. I detta avseende uppför den sig som partikel.

$$(4) \quad |x\rangle = A(|1\rangle - |3\rangle + 2i|4\rangle)$$

a) Summan av amplitudernas belopp i kvadrat ska vara lika med 1:

$$|A|^2 + |A|^2 + 4|A|^2 = 1$$

$$6|A|^2 = 1$$

$$|A|^2 = \frac{1}{6}$$

Vi kan låta A vara reell: $A = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$b) \text{ Energier } E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$$

De energier som kan erhållas är E_1 , E_3 och E_4 .

De erhålls med sannolikheterna

$$P(E_1) = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{6}$$

$$P(E_3) = \left| \frac{-1}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{6}$$

$$P(E_4) = \left| \frac{2i}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

c) Amplituden ges av

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 1| + \langle 4|) |x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{6}} (\langle 1| + \langle 4|) (|1\rangle - |3\rangle + 2i|4\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{12}} (1 + 2i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Beloppet i kvadrat ger sannolikheten: } \left| \frac{1+2i}{\sqrt{12}} \right|^2 &= \frac{(1+2i)(1-2i)}{12} = \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

d) $|x\rangle$ är inte stationärt eftersom det är en superposition av energitillstånd.

- 5) En bunden partikel har i kvantfysiken diskreta energinivåer.

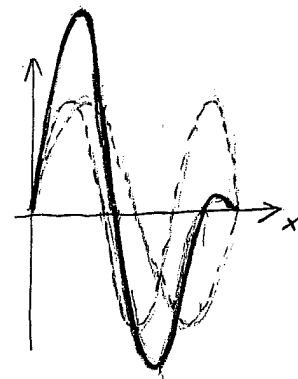
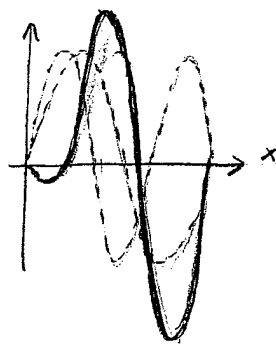
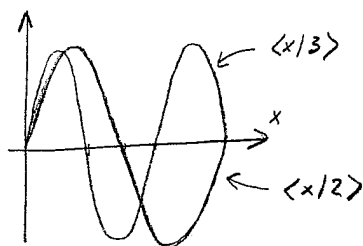
Den kinetiska energin är större än noll även i den lägsta energinivån.

Partikeln i gropen har en viss sannolikhet att befinner sig en bit in i gropens vägg (där den enligt klassisk fysik inte skulle kunna befinner sig), eller att tunnla ut ur gropen.

- 6) a) Rätt b) Rätt c) Fel d) Rätt e) Fel

- 7) a) Alla tillstånd $\psi_n(x)$ med jämnt värde på n , d.v.s. $n=2,4,6,\dots$

b)



$$\langle x|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle x|2\rangle - \langle x|3\rangle)$$

$$\langle x|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle x|2\rangle + \langle x|3\rangle)$$

Sannolikheten att hitta partikeln till vänster är större för tillståndet $|\phi\rangle$ än för tillståndet $|2\rangle$.

$$c) |2(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-iE_2 t/\hbar} |2\rangle - e^{-iE_3 t/\hbar} |3\rangle)$$

där $E_2 = 4E_1$, och $E_3 = 9E_1$, där

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \text{ är grundtillståndets energi.}$$