

Tentamen Kvantfysikens principer

18.00 - 22.00 , 14/12 2006

Hjälpmedel: Miniräknare samt bifogad formelsamling.

Var noga med att tydligt redovisa uträkningar och att ge motiveringar till alla svar (om inget annat sägs i uppgiften).

Maxpoäng är 36 p. För godkänt krävs minst 18 p, och för väl godkänt minst 27 p.

- (a) Redogör kortfattat för dubbelspaltförsöket med elektroner. Nämn speciellt i vilket avseende elektronerna uppför sig som vågor och i vilket avseende de uppför sig som partiklar. (3 p)
 - (b) Ibland påstås att vågfunktionen bara representerar vår kunskap om var partikeln befinner sig, att partikeln själv egentligen vet var den är. Varför är detta synsätt svårt att få ihop med resultatet av dubbelspaltförsöket? (2 p)
2. Här är amplituderna för en spinn-1 partikel i ett av de tre möjliga x-spinn-tillstånden ($|+x\rangle$, $|0x\rangle$ och $|-x\rangle$) att återfinnas i ett av de tre möjliga z-spinn-tillstånden ($|+z\rangle$, $|0z\rangle$ och $|-z\rangle$):

$$\begin{aligned}\langle +z|+x\rangle &= \frac{1}{2} & \langle +z|0x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \langle +z|-x\rangle &= \frac{1}{2} \\ \langle 0z|+x\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & \langle 0z|0x\rangle &= 0 & \langle 0z|-x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle -z|+x\rangle &= \frac{1}{2} & \langle -z|0x\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & \langle -z|-x\rangle &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- (a) Betrakta superpositionstillståndet

$$|\phi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(| +x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} | 0x\rangle \right)$$

Uttryck $|\phi\rangle$ som en superposition av z-spinn-tillstånden, och ange sannolikheterna för att en partikel i tillståndet $|\phi\rangle$ väljer de respektive kanalerna i en Stern-Garlach apparat som är orienterad i z-led. (4 p)

- (b) En partikel i tillståndet $|\phi\rangle$ sänds in i en SG-apparat orienterad i z-led med 0 och minus kanalen öppen, följd av en SG-apparat i x-led med endast minus-kanalen öppen. Så här alltså:

$$|\phi\rangle \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\}_{\hat{z}} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\}_{\hat{x}}$$

Hur stor andel kommer igenom? Redovisa kortfattat hur du resonerar. (3 p)

3. En stråle av atomkärnor med spinn 2 sänds in i en Stern-Garlach apparat.
- Vilket resultat av experimentet skulle man förvänta sig med tanke på klassisk fysik? (1 p)
 - Vad händer i själva verket? (1 p)
 - Vilken typ av partiklar är det fråga om och vad kan man säga om antalet neutroner och protoner i kärnan? (2 p)

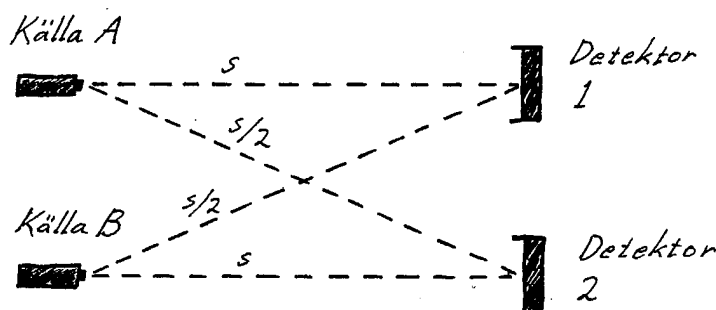
4. Figuren nedan visar en uppställning med två partikelkällor, A och B , samt två detektorer, 1 och 2. Här följer några amplituder för att partiklar ska gå från respektive källa till respektive detektor.

Amplituden att en partikel går från källa A till detektor 1 är s .

Amplituden att en partikel går från källa A till detektor 2 är $s/2$.

Amplituden att en partikel går från källa B till detektor 1 är $s/2$.

Amplituden att en partikel går från källa B till detektor 2 är s .



De båda källorna triggas att samtidigt sända ut varsin partikel. (Ge korta motiveringar till dina svar nedan.)

- Vad är sannolikheten att båda detektorerna gör utslag om partiklarna som sänds ut från källorna är bosoner av samma slag? (2 p)
 - Vad är sannolikheten att båda detektorerna gör utslag om partiklarna som sänds ut från källorna är fermioner av samma slag? (2 p)
 - Vad är sannolikheten att båda detektorerna gör utslag om partiklarna som sänds ut från källorna är partiklar av olika slag? (2 p)
5. Förklara kortfattat följande begrepp. (4 p)
- vågtal
 - tunnling
 - vågfunktion
 - $\langle a|b \rangle$

6. Elektronen i en väteatom befinner sig inom ett område som är i storleksordningen $5 \cdot 10^{-11}$ meter. Vilka slutsatser kan man dra om elektronens hastighet? (2 p)

7. Låt $|n\rangle$ beteckna energitillstånden för en partikel i en oändlig potentialgrop med bredd L . Det vill säga:

$$\langle x|n\rangle = \Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

i intervallet $0 < x < L$.

- (a) För vilka av dessa energitillstånd gäller att sannolikheten (eller, rättare sagt, sannolikhetsstätheten) är noll att hitta partikeln precis i gropens mitt? (2 p)
- (b) Konstruera en normerad superposition – som vi kan kalla $|\chi\rangle$ – av energitillstånd sådan att sannolikheten är störst att hitta partikeln i gropens högra del. (2 p)
- (c) Vad är sannolikheten för att man ska erhålla olika värden på energin om man mäter energin på tillståndet $|\chi\rangle$. Vad kan man säga om tillståndet efter att energimätningen har utförts? (2 p)
- (d) Ge exempel på ett stationärt och ett icke-stationärt tillstånd, i detta sammanhang. Förklara vad som skiljer de båda typerna av tillstånd åt! (2 p)

LITEN FORMELSAMLING

Partiklar - vågor

$$\begin{aligned}E &= \hbar\omega & \omega &= 2\pi\nu \\ \mathbf{p} &= \hbar\mathbf{k} & k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar\end{aligned}$$

Kvantformalism

$$\begin{aligned}\langle i|j\rangle &= \delta_{ij} \\ |\phi\rangle &= \sum_i |i\rangle \langle i|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle C_i \\ \sum_i |C_i|^2 &= 1 \\ \langle \phi|\chi\rangle &= \langle \chi|\phi\rangle^* \\ \sum_i |i\rangle \langle i| &= 1 \text{ (eller } |) \\ \langle \chi|A|\phi\rangle &= \sum_{i,j} \langle \chi|i\rangle \langle i|A|j\rangle \langle j|\phi\rangle\end{aligned}$$

Spinn 1/2

$$\begin{aligned}|+\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_x + |-\rangle_x) \\ |-\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-|+\rangle_x + |-\rangle_x)\end{aligned}$$

där $|+\rangle_z$ betecknar spinn upp tillståndet m a p z-axeln, etcetera.

Tidsutveckling

$$i\hbar \frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j(t)$$

Specialfall:

Två bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$$|\Phi\rangle_t = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$$

$$C_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

Energitillstånden:

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 + A$$

$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 - A$$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{d\psi(x, t)}{dt}$$

$$\psi_E(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \psi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$$

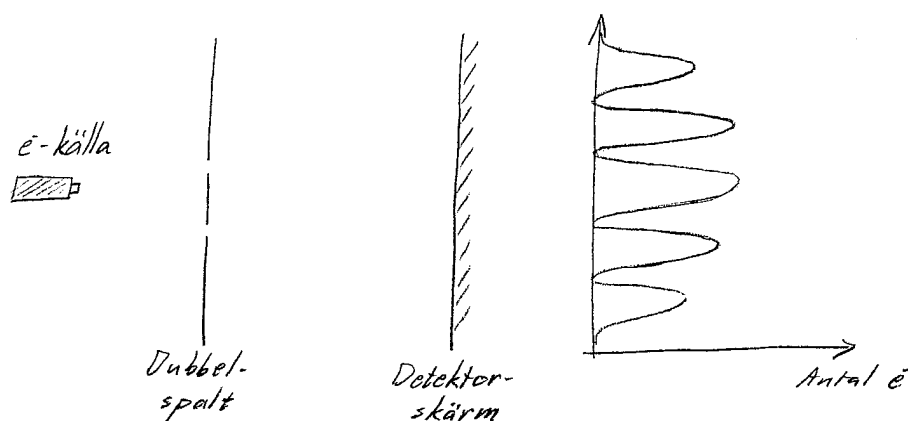
Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_{\text{proton}} = m_{\text{neutron}} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

① a)



Elektroner skjuts ut från elektronkällan med viss rörelsemängd, passerar dubbelspalten, och på skärmen uppstår ett interferensmönster. Mönstret uppträder även då källan skjutit ut en elektron åt gången, och tyder således på att elektronen är en våg. Å andra sidan gör varje elektron ett vällokaliserat avtryck på skärmen. I detta avseende uppför sig elektronen som en partikel.

b, Om vågfunktionen endast vore uttryck för vår kunskap / okunskap, så skulle den inte kunna ge upphov till något interferensmönster.

$$(2) a) |\phi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}(|+x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0x\rangle)$$

De bifogade amplituderna ger att

$$|+x\rangle = \frac{1}{2}|+z\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0z\rangle + \frac{1}{2}|-z\rangle$$

$$|0x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+z\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-z\rangle$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\phi\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{2}|+z\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0z\rangle + \frac{1}{2}|-z\rangle + \frac{1}{2}|+z\rangle - \frac{1}{2}|-z\rangle \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(|+z\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0z\rangle \right) \end{aligned}$$

$$\text{Sannolikhet för } |+z\rangle : |\langle +z|\phi\rangle|^2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Sannolikhet för } |0z\rangle : |\langle 0z|\phi\rangle|^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Sannolikhet för } |-z\rangle : |\langle -z|\phi\rangle|^2 = 0$$

b)

$$|\phi\rangle \rightarrow \begin{matrix} \begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix} \\ \hat{z} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix} \\ \hat{x} \end{matrix}$$

Det finns två möjliga vägar genom apparaterna:

via $|0z\rangle$ och via $|-z\rangle$. Motsvarande

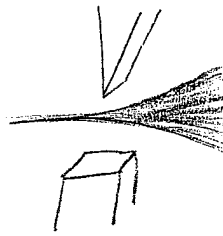
amplituder adderas:

$$\begin{aligned} \langle -x|0z\rangle \langle 0z|\phi\rangle + \langle -x|-z\rangle \langle -z|\phi\rangle &= \\ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) (0) &= \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

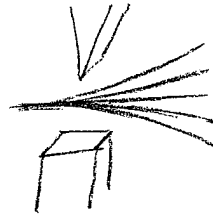
$\swarrow \langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$

Så andelen som kommer igenom är beloppet i kvadrat av detta, d.v.s. $\frac{1}{6}$.

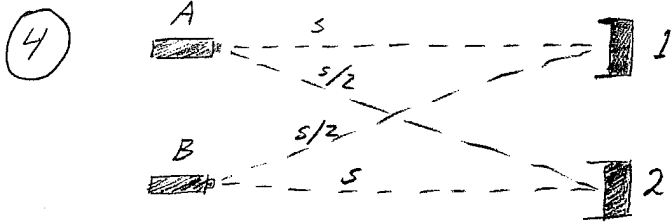
- ③ a) Strålen skulle spridas ut längs Stern-Gerlach apparatens axel.



- b) Strålen delar upp sig i fem olika nya strålar utspridda längs apparatens axel.



- c) Spinn 2 partiklar är bosoner.
Summan av antalet neutroner och antalet protoner är ett jämnt tal.



Källorna sänder ut varsin partikel, och detektorerna detekterar varsin partikel.

Detta kan ske på två sätt:

Partikel från A hamnar i detektor 1 och partikel från B hamnar i detektor 2, eller partikel från A hamnar i detektor 2 och partikel från B hamnar i detektor 1. Motsvarande amplituder interfererar på olika sätt beroende på partiklslaget.

- a) Bosoner

$$\left| s \cdot s + \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2} \right|^2 = \left| \frac{5s^2}{4} \right|^2 = \frac{25s^4}{16} \quad (\text{om } s \text{ antas vara reell})$$

- b) Fermioner

$$\left| s \cdot s - \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2} \right|^2 = \left| \frac{3s^2}{4} \right|^2 = \frac{9s^4}{16}$$

- c) Ej identiska partiklar

$$\left| s \cdot s \right|^2 + \left| \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2} \right|^2 = s^4 + \frac{s^4}{16} = \frac{17s^4}{16}$$

- ⑤ a) Vågtalet k är ett annat sätt att ange en vågs våglängd λ : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
- b) En partikel eller ett objekt kan enligt kvantfysiken förflytta sig genom en barriär, som den enligt klassisk fysik inte skulle kunna penetrera (p.g.a. för låg energi). Detta kallas tunnling.
- c) Vågfunktionen $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ anger sannolikhetsamplituden för en partikel i tillståndet $|\psi\rangle$ att vid positionsmätning återfinnas i viss position x . $|\psi(x)|^2$ ger sannolikhetsdensiteten.
- d) $\langle a | b \rangle$ är sannolikhetsamplituden att ett tillstånd $|b\rangle$ förändras till tillstånd $|a\rangle$.

⑥ $\Delta x \approx 5 \cdot 10^{-11}$ meter , $m_e \approx 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg,
 $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$ $\hbar \approx 1,05 \cdot 10^{-34}$ Js
 $\Rightarrow \Delta v \gtrsim \frac{\hbar}{m_e \Delta x} \approx 2,3 \cdot 10^6$ m/s

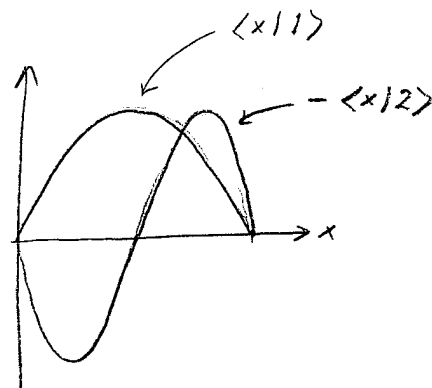
Om osäkerheten i hastighet är minst i storleksordningen 10^6 innebär det att resultatet av enskilda hastighetsmätningar också måste vara minst i den storleksordningen.

- ⑦ $|n\rangle$ är energitillstånden för partikel i oändlig potentialgräns.

$$\langle x|n\rangle = \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad 0 < x < L$$

a) $\psi_n\left(\frac{L}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{2} = 0$ för $n = 2, 4, 6, \dots$
d.v.s. alla jämna n .

b) $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle)$



c) Sannolikheten är $\frac{1}{2}$ för energin $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$

Sannolikheten är $\frac{1}{2}$ för energin $E_2 = \frac{4\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} = \frac{2\hbar^2 \pi^2}{mL^2}$

Efter att mätningen har utförts är tillståndet antingen $|1\rangle$ eller $|2\rangle$, med lika sannolikhet.

d) $|1\rangle$ är ett stationärt tillstånd

$|x\rangle$ är ett icke-stationärt tillstånd

I stationära tillstånd (till skillnad från icke-stationära) är energin välbestämd, och sannolikheter för olika mätutfall ändrar sig inte i tiden.

