

Tentamen Kvantfysikens principer

9.00 - 13.00 , 20/1 2007

Hjälpmedel: Miniräknare samt bifogad formelsamling.

Var noga med att tydligt redovisa uträkningar och att ge motiveringar till alla svar (om inget annat sägs i uppgiften).

Maxpoäng är 32 p. För godkänt krävs minst 16 p, och för väl godkänt minst 25 p.

1. Det klassiska och det kvantmekaniska sättet att beskriva elektroner skiljer sig på väsentliga sätt. Nämn tre skillnader mellan klassiska och kvantmekaniska elektroner. (3 p)
2. En elektron befinner sig i spinn-tillståndet spinn upp med avseende på z-axeln: $|+\rangle_z$. Ange sannolikheten för att den kommer igenom följande kombinationer av Stern-Garlach apparater. (Ange kortfattat hur du räknar i deluppgift (a) - (c). Notera att uttrycken för spintillstånd för spinn-1/2 partiklar ges i formelsamlingen.)

(a) $\left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}_{\hat{x}} \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}_{\hat{z}}$
(1 p)

(b) $\left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}_{\hat{x}} \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}_{\hat{z}}$
(1 p)

(c) $\left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}_{\hat{x}} \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}_{\hat{z}}$
(1 p)

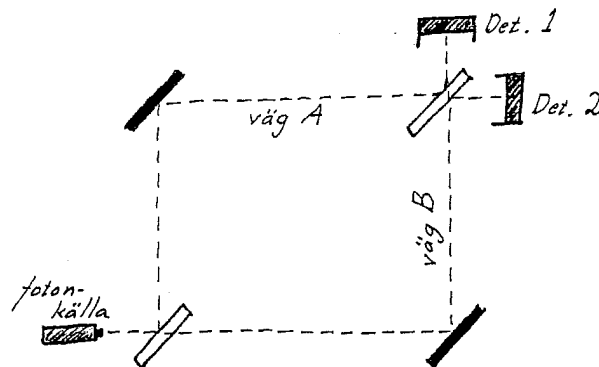
- (d) Ur ett klassiskt (icke-kvantfysikaliskt) perspektiv är dessa resultat förvånande. Varför, och vilken kvantmekanisk princip är det som illustreras? (2 p)
3. (a) Gör skisser av vågfunktionerna för de tre lägsta energitillstånd bundna i en potentialgrop. (2 p)
 - (b) Visa med hjälp av Heisenbergs osäkerhetsrelation att en partikel bunden i en potentialgrop måste ha en kinetisk energi större än noll. (2 p)

4. Låt $|n\rangle$ beteckna energitillstånden för en partikel i en oändlig potentialgrop med bredd L . Betrakta de båda superpositionstillstånden

$$|\chi\rangle = A (|1\rangle + \sqrt{3}|2\rangle)$$

$$|\phi\rangle = B (-\sqrt{3}|1\rangle + |2\rangle)$$

- (a) Normera $|\chi\rangle$ och $|\phi\rangle$, d.v.s. bestäm A och B . (2 p)
- (b) Vilka är de möjliga utfallen av en energimätning på tillstånden $|\chi\rangle$ respektive $|\phi\rangle$, och med vilka sannolikheter erhålls de? (2 p)
- (c) Vilken är sannolikheten att finna tillståndet $|\chi\rangle$ i tillståndet $|\phi\rangle$? (2 p)
- (d) Konstruera en normerad superposition av $|\chi\rangle$ och $|\phi\rangle$ som är stationär. (2 p)
5. Nämn två egenskaper som skiljer fermioner från bosoner, samt ange hur man vet om en viss atomkärna är en fermion eller en boson. (3 p)
6. Figuren nedan visar en uppställning med en fotonkälla, två vanliga speglar, två halvgenomskinliga speglar och två fotondetektorer. En foton från källan kan ta två vägar från källan till respektive detektor. Här följer några amplituder för att respektive detektor ska göra utslag då endast en av de två vägarna A eller B är öppen.



Amplituden för att detektor 1 gör utslag när endast väg A är öppen: $-i/2$

Amplituden för att detektor 2 gör utslag när endast väg A är öppen: $-1/2$

Amplituden för att detektor 1 gör utslag när endast väg B är öppen: $i/2$

Amplituden för att detektor 2 gör utslag när endast väg B är öppen: $-1/2$

- (a) Vad är amplituderna respektive sannolikheterna att detektor 1 respektive detektor 2 gör utslag när båda vägarna är öppna? (3 p)
- (b) Antag att man i uppställningen ovan kopplar de båda vanliga speglarna till detektorer som är så känsliga att de gör utslag då enskilda fotoner reflekteras av speglarna. Hur förändrar detta sannolikheterna för detektion i de båda detektorerna? Ge en kortfattat motivering av ditt svar. (2 p)

7. Ange för vart och ett av följande påståenden om det är felaktigt eller korrekt. För poäng krävs en kort motivering (tillräcklig för att det ska framgå att du inte bara chansar). (4 p)

- (a) I en Stern-Gerlach apparat är det magnetiska fältet inhomogent, d.v.s. starkare närmare den ena polen än den andra.
- (b) Att ett system befinner sig i en superposition mellan två tillstånd betyder bara att det inte är känt i vilket av tillstånden systemet befinner sig.
- (c) Om man i dubbelspaltförsöket med elektroner ökar avståndet mellan springorna i dubbelspalten kommer avståndet mellan två på varandra följande maxima i interferensmönstret också att bli större.
- (d) Ju större rörelsemängd som elektronerna har i dubbelspaltförsöket desto tätare blir det mellan två på varandra följande maxima i interferensmönstret.

LITEN FORMELSAMLING

Partiklar – vågor

$$\begin{aligned}E &= \hbar\omega & \omega &= 2\pi\nu \\ \mathbf{p} &= \hbar\mathbf{k} & k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar\end{aligned}$$

Kvantformalism

$$\begin{aligned}\langle i|j\rangle &= \delta_{ij} \\ |\phi\rangle &= \sum_i |i\rangle\langle i|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle C_i \\ \sum_i |C_i|^2 &= 1 \\ \langle\phi|\chi\rangle &= \langle\chi|\phi\rangle^* \\ \sum_i |i\rangle\langle i| &= 1 \text{ (eller } |) \\ \langle\chi|A|\phi\rangle &= \sum_{i,j} \langle\chi|i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|\phi\rangle\end{aligned}$$

Spinn 1/2

$$\begin{aligned}|+\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x + |-\rangle_x) \\ |-\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|+\rangle_x + |-\rangle_x) \\ \text{där } |+\rangle_z &\text{ betecknar spinn upp tillståndet m a p z-axeln, etcetera.}\end{aligned}$$

Tidsutveckling

$$i\hbar \frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}C_j(t)$$

Specialfall:

Två bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$$|\Phi\rangle_t = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$$

$$C_1(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

Energitillstånden:

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 + A$$

$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 - A$$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{d\psi(x, t)}{dt}$$

$$\psi_E(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$$

Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_{\text{proton}} = m_{\text{neutron}} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

LÖSNINGAR TILL TENTAMEN KVANTFYSIKENS PRINCIPER 20/1-07

①

Klassiska elektroner

- beskrivs som partiklar med välbestämda lägen.
- har välbestämt läge och hastighet
- kan befinna sig hur många som helst på samma ställe eller i samma tillstånd.

Kvantmekaniska elektroner

- beskrivs av komplex vågfunktion, och är mer eller mindre "utsmetade".
- kan inte på samma gång ha välbestämt läge och hastighet: $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$
- lyder under Paulis uteslutningsprincip, så två elektroner kan inte befinna sig i samma tillstånd.

②

$$\begin{cases} |+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x + |-\rangle_x) \\ |-\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|+\rangle_x + |-\rangle_x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z - |-\rangle_z) \\ |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + |-\rangle_z) \end{cases}$$

a) Amplitud: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$

Sannolikhet: $\frac{1}{4}$

b) Amplitud: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$

Sannolikhet: $\frac{1}{4}$

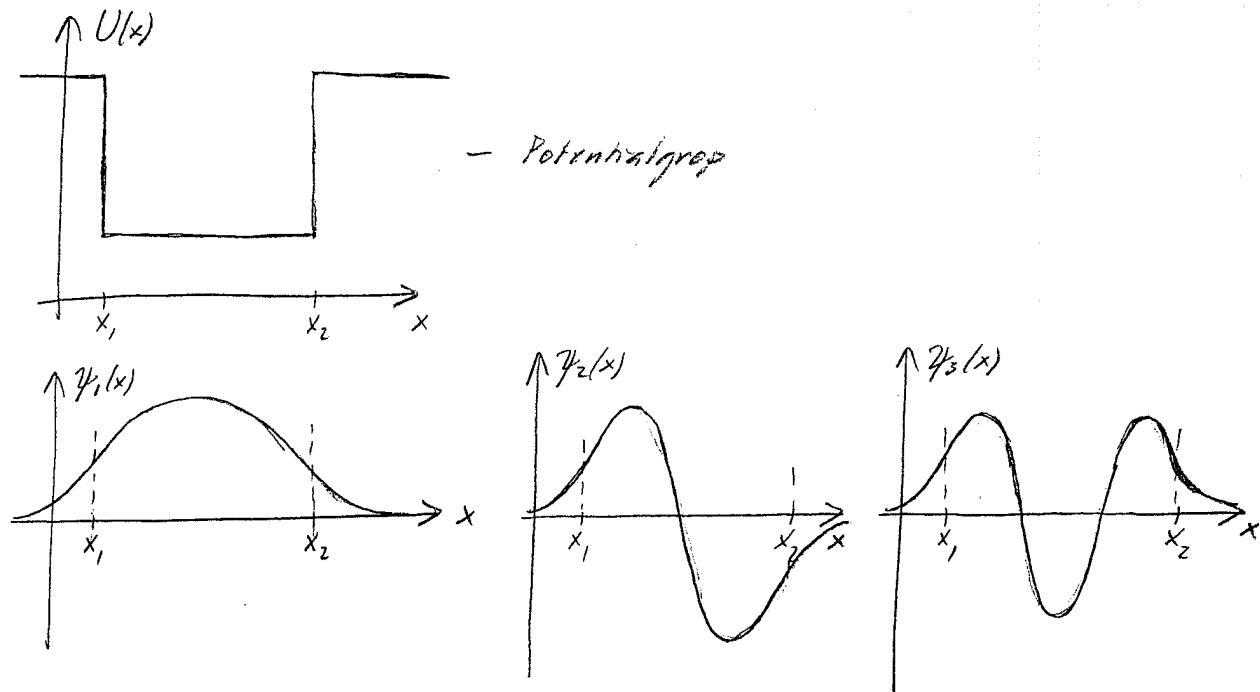
c) Amplitud: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

(Amplituderna för respektive väg adderas.)

Sannolikhet: 0

- d) I c) är fler vägar öppna. Ändå är chansen mindre att elektronen kommer igenom. Anledningen är att amplituderna för de båda vägarna interfererar. När något kan ske på flera sätt med samma slutresultat adderas amplituderna för de separata förloppen.

③ a)



Vågfunktionerna för de tre lägsta energitillstånden.

b) Heisenbergs osäkerhetsrelation: $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$

Antag att vi har en partikel som är bunden till en potentialgrop med bredd a . Då är osäkerheten i partikelns läge högst a , d.v.s. $\Delta x < a$.

Men enligt Heisenbergs relation måste då

$$\Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta x} \gtrsim \frac{\hbar}{a} > 0$$

Om $\Delta p > 0$ så måste även $p > 0$. Därmed är även den kinetiska energin $K = \frac{p^2}{2m} > 0$. V. S. B.

$$(4) \quad |\chi\rangle = A(|1\rangle + \sqrt{3}|2\rangle)$$

$$|\phi\rangle = B(-\sqrt{3}|1\rangle + |2\rangle)$$

a) Antag A och B reella.

$$\text{Normering: } A^2 + 3A^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

$$3B^2 + B^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}$$

b) Vid en energimätning på $|\chi\rangle$ eller $|\phi\rangle$ kan energierna E_1 respektive E_2 erhållas.

För tillståndet $|\chi\rangle$ är sannolikheten för E_1 , $\frac{1}{4}$ och för E_2 , $\frac{3}{4}$.

För tillståndet $|\phi\rangle$ är sannolikheten för E_1 , $\frac{3}{4}$ och för E_2 , $\frac{1}{4}$.

c) Amplitud att finna tillståndet $|\chi\rangle$ i tillståndet $|\phi\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle\phi|\chi\rangle &= \frac{1}{4}(-\sqrt{3}\langle 1| + \langle 2|)(|1\rangle + \sqrt{3}|2\rangle) = \\ &= \frac{1}{4}(-\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 0 \end{aligned}$$

Så sannolikheten är noll.

d) $|1\rangle$ och $|2\rangle$ är stationära tillstånd. Uttryck (t.ex.) $|1\rangle$ i $|\chi\rangle$ och $|\phi\rangle$:

$$|1\rangle = \frac{1}{2}(|\chi\rangle - \sqrt{3}|\phi\rangle)$$

- ⑤ Fermioner lyder under Paulis uteslutningsprincip, vilket inte bosoner gör.

Fermioner har halvtaligt spin $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$ medan bosoner har heltaligt spin $(1, 2, \dots)$.

En atomkärna är en fermion om den innehåller ett udda antal nukleoner (neutroner + protoner), annars är den en boson.

- ⑥ a) För att få amplituderna då båda vägarna är öppna måste amplituderna för de enskilda vägarna adderas.

$$\text{Amplitud att detektor 1 gör utslag: } -\frac{i}{2} + \frac{i}{2} = 0$$

$$\text{Amplitud att detektor 2 gör utslag: } -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

Så sannolikheten att detektor 1 gör utslag är noll, och sannolikheten att detektor 2 gör utslag är ett.

- b) De tillagda detektorerna förstör interferensen, eftersom de två vägarna inte längre ger upphov till oskiljbara slutresultat. Sannolikheten att detektor 1 gör utslag blir nu

$$\left|-\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Och sannolikheten att detektor 2 gör utslag blir

$$\left|-\frac{1}{2}\right|^2 + \left|-\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

⑦ a) Rätt (Annars skulle en spinnande laddad partikel inte vika av i fältet)

b) Fel (En superposition av två tillstånd har ingen klassisk motsvarighet. I någon mening är systemet i fråga i båda tillstånden samtidigt.)

c) Fel (Avståndet kommer att minska. Ett stort avstånd mellan springerna betyder att det räcker med en liten förflyttning längs skärmen för att skillnaden i avstånd till respektive springa ska förändras med en hel våglängd.)

d) Rätt ($p = \frac{h}{\lambda}$, så stor rörelsemängd innebär liten våglängd, vilket innebär "tätare" interferensmönster.)

