



STOCKHOLMS UNIVERSITET FYSIKUM

TENTAMEN - Kvantfysikens principer 7,5 hp

Tid: 18.00 - 22.00, torsdag 8 november 2007.

Hjälpmedel: utdelad formelsamling, miniräknare.

Var noga med att tydligt redovisa uträkningar och att ge motiveringar till alla svar (om inget annat sägs i uppgiften).

Maxpoäng är 36 p. Betyg sätts utifrån kursens betygskriterier.

TH

1. En elektron befinner sig i spintillståndet

$$|\Phi\rangle = A(|+\rangle_z - 2|-\rangle_z)$$

där $|+\rangle_z$ och $|-\rangle_z$ betecknar tillstånden spinn upp respektive spinn ner med avseende på z -axeln.

- (a) Normera tillståndet $|\Phi\rangle$. Beskriv även betydelsen av att normera ett tillstånd. (2 p)
- (b) Vad är sannolikheten att vid en mätning av $|\Phi\rangle$ -elektronens spinn i z -led finna den i tillståndet $|+\rangle_z$ respektive $|-\rangle_z$? (2 p)
- (c) Elektronen i tillståndet $|\Phi\rangle$ sänds genom en Stern-Gerlachapparat orienterad i x -led och med minuskanalen blockerad:

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\}_x$$

Vad är sannolikheten att den kommer igenom? (2 p)

- (d) Elektronen i tillståndet $|\Phi\rangle$ sänds genom Stern-Gerlachapparaterna (från vänster till höger):

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\}_x \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\}_z$$

Vad är sannolikheten att den kommer igenom? (2 p)

2. (a) Gör skisser av vågfunktionerna för de tre lägsta energitillstånden bundna i en potentialgrop. (2 p)
- (b) Visa med hjälp av Heisenbergs osäkerhetsrelation att en partikel bunden i en potentialgrop måste ha en kinetisk energi större än noll. (2 p)

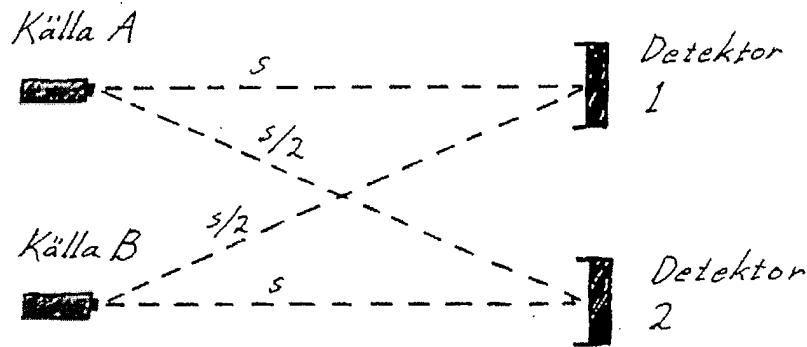
3. Figuren nedan visar en uppställning med två partikelkällor, A och B , samt två detektorer, 1 och 2. Här följer några amplituder för att partiklar ska gå från respektive källa till respektive detektor:

$$A \rightarrow 1 : s$$

$$A \rightarrow 2 : s/2$$

$$B \rightarrow 1 : s/2$$

$$B \rightarrow 2 : s$$



- Vad är sannolikheten att båda detektorerna gör utslag om partiklarna är bosoner av samma slag? (2 p)
 - Vad är sannolikheten att båda detektorerna gör utslag om partiklarna är fermioner av samma slag? (2 p)
 - Vad är sannolikheten att båda detektorerna gör utslag om partiklarna är av olika slag? (2 p)
4. Låt $|n\rangle$ beteckna energitillstånden för en partikel i en oändlig potentialgrop med bredd L . Det vill säga:

$$\langle x|n\rangle = \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} ; n = 1, 2, 3, \dots$$

i intervallet $0 < x < L$.

- Skriv ner ett normerat tillstånd för vilket gäller att man vid mätning av partikelns energi erhåller värdet E_1 i 50% av fallen och värdet E_3 i 50% av fallen. (2 p)
- Gör en grov skiss av hur sannolikhetsfördelningen att hitta partikeln i olika positioner ser ut för ditt tillstånd i (a). (2 p)
- Kommer sannolikhetsfördelningen i (b) att förändra sig när tiden går? I så fall hur? Förklara i ord och eventuellt figur. (2 p)

5. En partikel kan finna sig i två olika lägen, 1 och 2. Motsvarande tillstånd betecknar vi $|1\rangle$ respektive $|2\rangle$. Partikeln har två olika energitillstånd

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle)$$
$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle)$$

med energi E_I respektive E_{II} . Om man startar med partikeln i $|1\rangle$ tar det tiden τ tills den tunnlat över och helt säkert återfinns i $|2\rangle$. Betrakta en partikel som vid tiden $t = 0$ befinner sig i tillståndet

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (2|1\rangle + |2\rangle) .$$

Vad är resultatet av en mätning av partikelns:

- (a) Läge vid $t = 0$? (2 p)
 - (b) Energi vid $t = 0$? (2 p)
 - (c) Läge vid $t = \tau$? (2 p)
 - (d) Energi vid $t = \tau$? (2 p)
6. Redogör kortfattat för dubbelspaltexperimentet med elektroner. I vilket avseende uppför sig elektronerna som vågor i experimentet och i vilket uppför de sig som partiklar? (4 p)

LITEN FORMELSAMLING

Partiklar – vågor

$$\begin{aligned} E &= \hbar\omega & \omega &= 2\pi\nu \\ \mathbf{p} &= \hbar\mathbf{k} & k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar \end{aligned}$$

Kvantformalism

$$\begin{aligned} \langle i|j\rangle &= \delta_{ij} \\ |\phi\rangle &= \sum_i |i\rangle \langle i|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle C_i \\ \sum_i |C_i|^2 &= 1 \\ \langle \phi|\chi\rangle &= \langle \chi|\phi\rangle^* \\ \sum_i |i\rangle \langle i| &= 1 \text{ (eller } \mathbb{I}) \\ \langle \chi|A|\phi\rangle &= \sum_{i,j} \langle \chi|i\rangle \langle i|A|j\rangle \langle j|\phi\rangle \end{aligned}$$

Spinn 1/2

$$\begin{aligned} |+\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_x + |-\rangle_x) \\ |-\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-|+\rangle_x + |-\rangle_x) \\ \text{där } |+\rangle_z &\text{ betecknar spinn upp tillståndet m a p } z\text{-axeln, etcetera.} \end{aligned}$$

Tidsutveckling

$$i\hbar \frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j(t)$$

Specialfall:

Två bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$$|\Phi\rangle_t = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$$

$$C_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

Energitillstånden:

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 + A$$

$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 - A$$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{d\psi(x, t)}{dt}$$

$$\psi_E(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$$

Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad ; \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_{\text{proton}} = m_{\text{neutron}} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

LÖSNINGAR TILL TENTAMEN KVANTFYSIKENS PRINCIPER 8/11-07

(1) $|\Phi\rangle = A(1+\gamma_2 - 2|\gamma_2\rangle)$

- a) Beloppet i kvadrat av koefficienten framför respektive bas tillstånd ger sannolikheten för just det tillståndet. Sannolikheten att vid mätning erhålla något resultat är 1, och alltså måste alla koefficienters belopp i kvadrat summera till 1:

$$|A|^2 + |2A|^2 = 1$$

Antag att A är reell:

$$A^2 + 4A^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

b) $P(+, z) = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \right|^2 = \frac{1}{5}$

$$P(-, z) = \left| \frac{-2}{\sqrt{5}} \right|^2 = \frac{4}{5}$$

c) Ur formelsamlingen: $|+\gamma_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\gamma_1\rangle + |-\gamma_1\rangle)$

$$|-\gamma_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\gamma_1\rangle + |+\gamma_1\rangle)$$

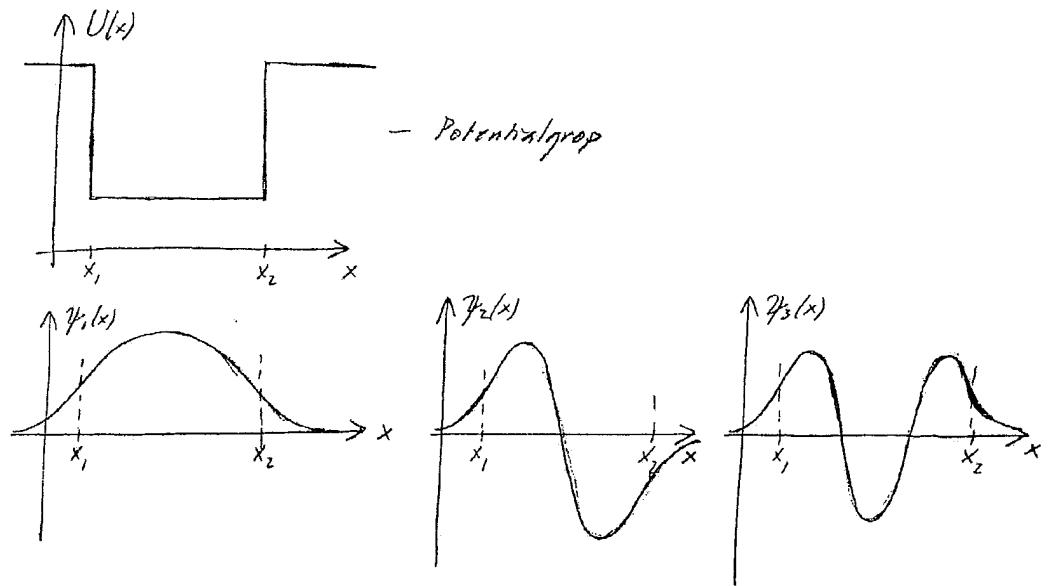
$$\Rightarrow \Phi = \frac{1}{\sqrt{5}}(|+\gamma_2\rangle - 2|-\gamma_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\gamma_1\rangle + |-\gamma_1\rangle) - \frac{2}{\sqrt{2}}(|-\gamma_1\rangle + |+\gamma_1\rangle)\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}(3|+\gamma_1\rangle - |-\gamma_1\rangle)$$

Så sannolikheten är $\left| \frac{3}{\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{9}{10}$ att den kommer igenom.

- d) Ur (c) framgår att sannolikheten är $\frac{1}{10}$ att den kommer igenom den första. Gör den det befinner den sig i $|-\gamma_1\rangle$ -tillståndet. Då är sannolikheten $\frac{1}{2}$ att den passerar även den andra apparaten.

Total sannolikhet = $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$

(2) a)



Vågfunktionerna för de tre lägsta energitillstånden.

b) Heisenbergs osäkerhetsrelation: $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$

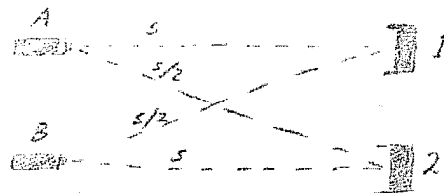
Antag att vi har en partikel som är bunden till en potentialgräp med bredd a . Då är osäkerheten i partikelns läge högst a , d.v.s. $\Delta x < a$.

Men enligt Heisenbergs relation måste då

$$\Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta x} \gtrsim \frac{\hbar}{a} > 0$$

Om $\Delta p > 0$ så måste även $p > 0$. Därmed är även den kinetiska energin $K = \frac{p^2}{2m} > 0$. V. S. B.

(3)



Källorna sänder ut varsin partikel, och detektorerna detekterar varsin partikel.

Detta kan ske på två sätt:

Partikel från A hamnar i detektor 1 och partikel från B hamnar i detektor 2, eller partikel från A hamnar i detektor 2 och partikel från B hamnar i detektor 1. Motsvarande amplituder interpreteras på olika sätt beroende på partiklslaget.

a) Bosoner

$$|s \cdot s + \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2}|^2 = \left| \frac{5s^2}{4} \right|^2 = \frac{25s^4}{16} \quad (\text{om } s \text{ antas vara reell})$$

b) Fermioner

$$|s \cdot s - \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2}|^2 = \left| \frac{3s^2}{4} \right|^2 = \frac{9s^4}{16}$$

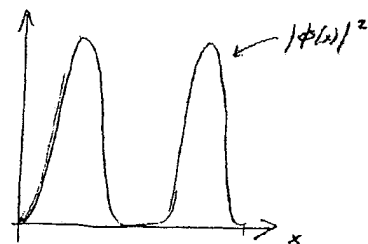
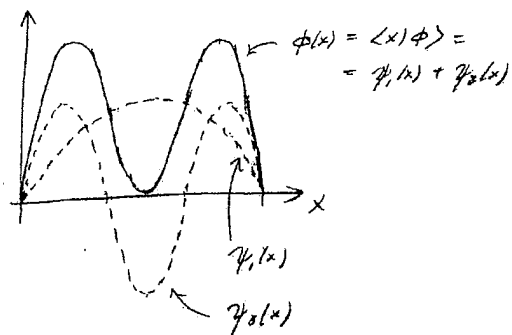
c) Ej identiska partiklar

$$|s \cdot s|^2 + \left| \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2} \right|^2 = s^4 + \frac{s^4}{16} = \frac{17s^4}{16}$$

(4) a) Till exempel:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |3\rangle)$$

$$b) \langle x|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle x|1\rangle + \langle x|3\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) + \psi_3(x))$$



c) När tiden går kommer sannolikhetsfördelningen att oscillera mellan utseendet i b) (två toppar vid potentialgränsens kant) och en topp i mitten.

(5) $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|1\rangle + |2\rangle)$ vid $E=0$

a) $P(\text{läge 1}) = \left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right|^2 = \frac{4}{5}$

$P(\text{läge 2}) = \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|^2 = \frac{1}{5}$

b) $\begin{cases} |I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle) \\ |II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I\rangle + |II\rangle) \\ |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|I\rangle + |II\rangle) \end{cases}$

Uttryck $|\phi\rangle$ i energiställanden $|I\rangle$ och $|II\rangle$:

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2|1\rangle + |2\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}(|I\rangle + |II\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-|I\rangle + |II\rangle)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}}(|I\rangle + 3|II\rangle) \end{aligned}$$

Alltså: $P(E_I) = \frac{1}{10}$

$P(E_{II}) = \frac{9}{10}$

c) Vi vet att $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ och $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ under tiden τ .

Så $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|1\rangle + |2\rangle) \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(2|2\rangle + |1\rangle)$ (Så när som på total komplex fas)

Alltså: $P(\text{läge 1}) = \frac{1}{5}$

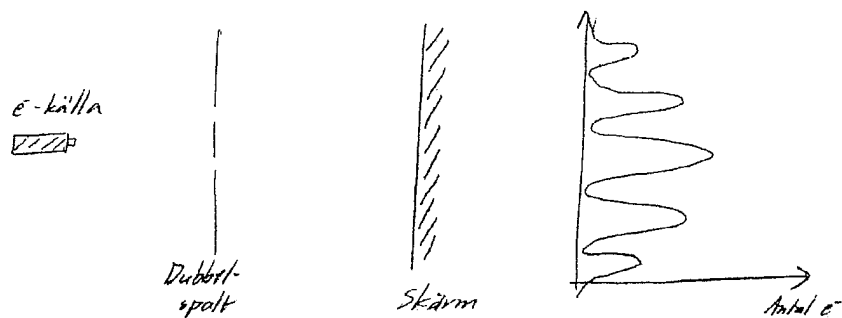
$P(\text{läge 2}) = \frac{4}{5}$

d) Resultatet blir samma som i b), d v s sannolikheterna $\frac{1}{10}$ respektive $\frac{9}{10}$ för E_I respektive E_{II} .

Detta eftersom energiställanden är stationära. Man kan även se det genom att uttrycka

$|\phi\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|2\rangle + |1\rangle)$ i $|I\rangle$ och $|II\rangle$.

(6)



Om endast ett av hålen är öppna erhålls inget interferensmönster på skärmen, men om båda hålen är öppna får man interferens (som i diagrammet ovan), även om bara en e^- åt gången passerar spalten. Således måste varje enskild elektron i någon mening passera båda hålen. I detta avseende uppför sig elektronen som en våg.

På andra sidan sätter varje elektron ett distinkt avtryck på skärmen. I detta avseende uppför den sig som en partikel.