



STOCKHOLMS UNIVERSITET FYSIKUM

TENTAMEN - Kvantfysikens principer 7,5 hp

Tid: 9.00 - 13.00, lördag 19 januari 2008

Hjälpmedel: utdelad formelsamling, miniräknare

Var noga med att tydligt redovisa uträkningar och att ge motiveringar till alla svar (om inget annat sägs i uppgiften).

Maxpoäng är 36 p. Betyg sätts utifrån kursens betygskriterier.

TH

1. (a) Man har mätt upp hastigheten hos en elektron till $3,6 \times 10^6$ m/s med noggrannheten $\pm 0,05 \times 10^6$ m/s. Hur väl kan man som bäst känna till elektronens position, dvs, hur utsmetad är elektronen minst? (2 p)
- (b) Förklara kvalitativt, gärna genom att rita, hur man kan förstå Heisenbergs osäkerhetsrelation som en följd av att "partiklar" måste beskrivas som vågor. (2 p)

2. En elektron befinner sig i spinttillståndet

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (|+\rangle_z + 2|-\rangle_z)$$

där $|+\rangle_z$ och $|-\rangle_z$ betecknar tillstånden spinn upp respektive spinn ner med avseende på z -axeln.

- (a) Vad är sannolikheten att vid en mätning av spinnet i z -led finna elektronen i tillståndet $|+\rangle_z$? (1 p)
- (b) Vad är sannolikheten att vid en mätning av elektronens spinn i x -led finna den i tillståndet $|+\rangle_x$? (2 p)
- (c) Elektronen i tillståndet $|\Phi\rangle$ sänds genom Stern-Gerlachapparaterna (från vänster till höger):

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\}_z \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\}_x$$

Vad är sannolikheten att den kommer igenom? (2 p)

- (d) Elektronen i tillståndet $|\Phi\rangle$ sänds genom Stern-Gerlachapparaterna (från vänster till höger):

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\}_x \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\}_z$$

Vad är sannolikheten att den kommer igenom? (2 p)

3. Det klassiska och kvantmekaniska sättet att beskriva elektroner skiljer sig på väsentliga sätt. Nämn tre skillnader mellan klassiska och kvantmekaniska elektroner. (3 p)

4. Låt $|n\rangle$ beteckna energitillstånden för en partikel i en oändlig potentialgrop med bredd L . Betrakta överlagringstillståndet:

$$|\chi\rangle = A(|1\rangle - |3\rangle + 2i|4\rangle)$$

- (a) Normera $|\chi\rangle$, dvs bestäm A . (2 p)

- (b) Vilka är de möjliga utfallen av en energimätning på tillståndet $|\chi\rangle$ och med vilka sannolikheter erhålls de? (2 p)

- (c) Vad är sannolikheten att finna tillståndet $|\chi\rangle$ i tillståndet

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |4\rangle) ? \quad (2 p)$$

- (d) Är $|\chi\rangle$ ett stationärt tillstånd eller inte? Motivera ditt svar! (1 p)

5. Förklara kortfattat innebörden i följande begrepp:

- (a) Paulis uteslutningsprincip
- (b) Stationärt tillstånd
- (c) Boson
- (d) Vågfunktion
- (e) Bastillstånd (5 p)

6. Låt $|n\rangle$ beteckna energitillstånden för en partikel i en oändlig potentialgrop med bredd L . Det vill säga:

$$\langle x|n\rangle = \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} ; n = 1, 2, 3, \dots$$

i intervallet $0 < x < L$.

- (a) För vilka av dessa energitillstånd är sannolikhetstätheten noll att hitta partikeln precis i gropens mitt? (2 p)

- (b) Betrakta tillstånden:

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |3\rangle)$$

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle) .$$

Gör en grov skiss över vågfunktionerna för dessa båda tillstånd och ange hur man experimentellt kan skilja mellan dem. (3 p)

- (c) Skriv ner hur tillståndet $|\chi\rangle$ förändrar sig med tiden t , dvs, skriv ner $|\chi(t)\rangle$. Uttryck svaret i grundtillståndets energi. (2 p)

7. Redogör kortfattat för förhållandet mellan Schrödingerekvationen och den tidsberoende Schrödingerekvationen. Vad skiljer ekvationerna och vad beskriver lösningarna till respektive ekvation? (3 p)

LITEN FORMELSAMLING

Partiklar -- vågor

$$\begin{aligned} E &= \hbar\omega & \omega &= 2\pi\nu \\ p &= \hbar k & k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar \end{aligned}$$

Kvantformalism

$$\begin{aligned} \langle i|j \rangle &= \delta_{ij} \\ |\phi\rangle &= \sum_i |i\rangle \langle i|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle C_i \\ \sum_i |C_i|^2 &= 1 \\ \langle \phi|\chi \rangle &= \langle \chi|\phi \rangle^* \\ \sum_i |i\rangle \langle i| &= 1 \text{ (eller } \mathbb{I}) \\ \langle \chi|A|\phi \rangle &= \sum_{i,j} \langle \chi|i \rangle \langle i|A|j \rangle \langle j|\phi \rangle \end{aligned}$$

Spinn 1/2

$$\begin{aligned} |+\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_x + |-\rangle_x) \\ |-\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-|+\rangle_x + |-\rangle_x) \end{aligned}$$

där $|+\rangle_z$ betecknar spinn upp tillståndet m a p z-axeln, etcetera.

Tidsutveckling

$$i\hbar \frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j(t)$$

Specialfall:

Two bastillstånd, $H_{11} = H_{22} = E_0$ och $H_{12} = H_{21} = -A$

$$|\Phi\rangle_t = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$$

$$C_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

Energitillstånden:

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 + A$$

$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \quad \text{energi } E_0 - A$$

Vågfunktionen och Schrödingerekvationen

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x|\psi\rangle dx$$

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{d\psi(x, t)}{dt}$$

$$\psi_E(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

Oändlig potentialgrop

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$$

Några naturkonstanter

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_{\text{elektron}} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_{\text{proton}} = m_{\text{neutron}} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Lösningar - tentamen kvant fysikens principer 19/1-08

1. a) $v = 3,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ $\Delta v = 0,1 \cdot 10^6 \text{ m/s}$
 $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$$\Rightarrow \Delta p = m_e \Delta v = 9,11 \cdot 10^{-26}$$

Heisenbergs osäkerhetsrelation $\Delta x \Delta p \geq \hbar$

$$\Rightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} \approx 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

b) Ett vågpaket 

som har väldefinierad våglängd är utspritt över ett stort område. Extremfallet är en ren sinusvåg som har $\Delta x = \infty$ och $\Delta \lambda = 0$.

Om flera sinusvågor, med våglängder i ett litet våglängdsintervall $\Delta \lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ adderas erhålls ett vågpaket med stor utsträckning Δx .

litet $\Delta \lambda \longleftrightarrow$ stor Δx

stor $\Delta \lambda \longleftrightarrow$ litet Δx

Eftersom $p = \frac{h}{\lambda}$ så får man en motsvarande osäkerhetsrelation mellan Δx och Δp .

2. a)

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (|+\rangle_z + 2|-\rangle_z)$$

Sannolikheten är $\frac{1}{5}$ (Beloppet i kvadrat av koef. framför $|+\rangle_z$)

b)

$$\begin{cases} |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_z + |-\rangle_z) \\ |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|+\rangle_z + |-\rangle_z) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_z + 2|-\rangle_z) = \dots = \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} (-|+\rangle_x + 3|-\rangle_x) \end{aligned}$$

Så sannolikheten är $\frac{1}{10}$ (Beloppet i kvadrat av koef. framför $|+\rangle_x$)

c) Sannolikheten för passage genom z-apparaten är $\frac{1}{5}$.
Om elektronen passerar drann befinner den sig därefter i tillståndet $|+\rangle_z$. För en sådan elektron är sannolikheten $\frac{1}{2}$ för passage genom en x-apparat med +-kanalen öppen.
Sammantaget blir sannolikheten $\frac{1}{10}$

d) Ett ryssenmaning motsvarande det i c), ger sannolikheten

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$$

mmmm

3)

Klassiska elektroner

- beskrivs som partiklar med välbestämda lägen.
- har välbestämt läge och hastighet
- kan befinna sig hur många som helst på samma ställe eller i samma tillstånd.

Kvantmekaniska elektroner

- beskrivs av komplex vågfunktion, och är mer eller mindre "utsmetade".
- kan inte på samma gång ha välbestämt läge och hastighet:
 $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$
- lyder under Paulis uteslutningsprincip, så två elektroner kan inte befinna sig i samma tillstånd.

4. a)

$$|\chi\rangle = A(|1\rangle - |3\rangle + 2i|4\rangle)$$

Summan av sannolikheterna blir 1. Kvadraten ska vara lika med 1:

$$|A|^2 + |A|^2 + 4|A|^2 = 1$$

$$6|A|^2 = 1$$

$$|A|^2 = \frac{1}{6}$$

Vi kan låta A vara reell: $A = \frac{1}{\sqrt{6}}$

b)

$$\text{Energier } E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$$

De energier som kan erhållas är E_1 , E_3 och E_4 .

De erhålls med sannolikheterna

$$P(E_1) = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{6}$$

$$P(E_3) = \left| \frac{-1}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{6}$$

$$P(E_4) = \left| \frac{2i}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

c)

Amplituden ges av

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 1| + \langle 4|) |\chi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{6}} (\langle 1| + \langle 4|) (|1\rangle - |3\rangle + 2i|4\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{12}} (1 + 2i) \end{aligned}$$

Beloppet i kvadrat ger sannolikheten: $\left| \frac{1+2i}{\sqrt{12}} \right|^2 = \frac{(1+2i)(1-2i)}{12} = \frac{5}{12}$

d)

$|\chi\rangle$ är inte stationärt eftersom det är en superposition av energitillstånd.

5. a) Två fermioner (av samma slag) kan aldrig befinna sig i exakt samma kvantmekaniska tillstånd.

b) Ett stationärt tillstånd har välbestämd energi E . Alla amplituder i ett sådant tillstånd har samma tidsutveckling, nämligen $e^{-iEt/\hbar}$

I en process med två bosoner interfererar de två amplituderna (som motsvarar utbyte av partiklarna) med ett $+$ -tecken. Det innebär att det blir mer sannolikt att hitta bosonerna i samma tillstånd.

c) Bosoner har heltaligt spinn.

d) Vågfunktionen är amplituden att hitta en partikel i en viss punkt i rummet: $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$. Sannolikheten att hitta partikeln inom ett litet intervall Δx är

$$P(x, \Delta x) = |\psi(x)|^2 \Delta x$$

e) Bastillstånd är en fullständig uppsättning tillstånd $|i\rangle$ för vilka

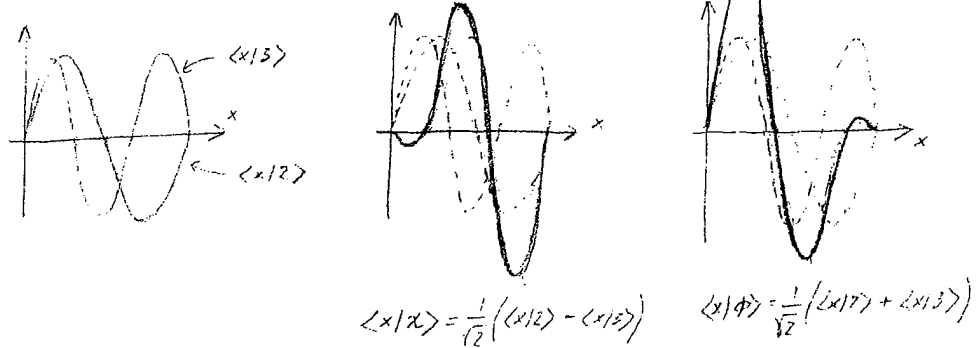
$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$$

gäller. Ett godtyckligt tillstånd är en superposition av bastillstånden.

6. a)

Alla tillstånd $\psi_n(x)$ med jämnt värde på n , d.v.s. $n = 2, 4, 6, \dots$

b)



Sannolikheten att hitta partikeln till vänster är större för tillståndet $|\phi\rangle$ än för tillståndet $|\chi\rangle$.

c)

$$|\chi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-iE_2 t/\hbar} |2\rangle - e^{-iE_3 t/\hbar} |3\rangle \right)$$

där $E_2 = 4E_1$ och $E_3 = 9E_1$, där

$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ är grundtillståndets energi.

7. Lösningar till Schrödinger-ekvationen ger rums- och tidsberoendet för vågfunktionen för en partikel som befinner sig i en given potential $V(x)$.

Om man i S.-ekvationen sätter in lösningar på formen

$$\psi_E(x, t) = e^{-iEt/\hbar} \psi(x)$$

(alltså stationära lösningar, svarande mot en viss energi E)

så kan tidsberoendet förkortas bort och man får den tidsoberoende S.-ekvationen. Dess lösningar ger alltså rumsberoendet $\psi(x)$ för tillstånd med välbestämd energi.

