+9

Tentamen i Kvantfysikens Principer 970122

Tillåtna hjälpmedel: utdelad fomelsamling och miniräknare. Var noga med att motivera dina lösningar! Lycka till!

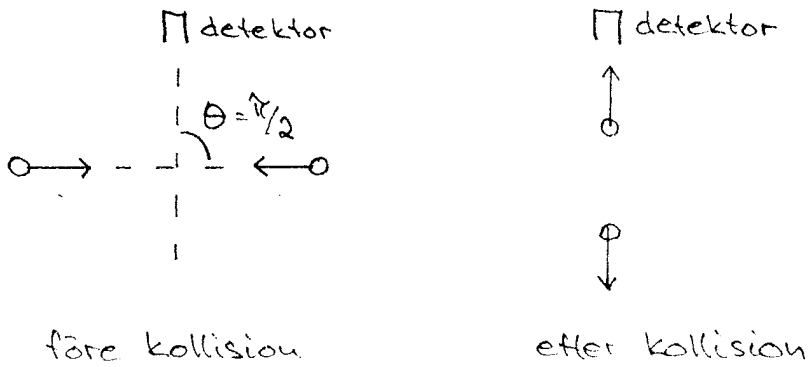
1) Beskriv kortfattat dubbelspaltexperimentet för elektroner! Var noga med att få med vad som skiljer detta experiment från vad man enligt klassisk fysik skulle vänta sig för dubbelspaltexperiment med a) kulor och b) vågor. (4p)

2) Ge ett uttryck för sannolikhetsamplituden för att en elektron skall ta sig från en sändare s till en detektor i x om den på vägen måste passera en skärm med tre hål i. (Uttryck amplituden i amplituder $< x|i >$ och $< i|s >$ där $i = 1, 2, 3$ och förklara vad dessa amplituder betyder.) (4p)

3) En elektrons läge (i x-led) mäts genom att elektronen passerar en spalt med bredden $1 \times 10^{-10} m$. Bestäm osäkerheten i elektronens rörelsemängd (i x-led) efter att den passerat spalten! (4p)

4) Redogör för hur man med hjälp av Stern-Gerlach apparater kan 'producera' atomer som befinner sig i tillståndet $|+>$. Atomerna antas ha spinn 1 och $|+>, |0>, |->$ betecknar de tillstånd där spinnets komponent i z-riktningen är $s_z = \hbar, 0, -\hbar$. Dessa tre tillstånd är en uppsättning bastillstånd $|i>$, och uppfyller relationerna $< i|j >= \delta_{ij}$ och $< \chi|\phi >= \sum_i < \chi|i >< i|\phi >$. Redogör för vad dessa båda relationer betyder med hjälp av Stern-Gerlach apparater. (4p)

5) Partiklar skjuts mot varandra i en accelerator och man detekterar partiklar som har spridits vinkeln $\pi/2$ i masscentrumsystemet, se fig.



Antag att amplituden för att en partikel skall spridas vinkeln θ är $f(\theta)$. Ge ett uttryck för sannolikheten att hitta någon partikel i detektorn om partiklarna är

a) av olika typ? (1p)

b) identiska bosoner? (1p)

c) elektroner med spinnet i samma riktning? (1p)

d) elektroner med spinnet i olika riktningar (antag att elektronerna inte kan byta spinn med varandra)? (1p)

6) Antag att en ammoniakmolekyl befinner sig i tillståndet $|1>$ vid tiden $t = 0\,s$. Om $H_{12}/\hbar = H_{21}/\hbar = -\frac{\pi}{2}\,s^{-1}$, vad är sannolikheten att

a) hitta molekylen i tillstånd $|2>$ efter $0\,s$?

b) hitta molekylen i tillstånd $|2>$ efter $1\,s$?

c) hitta molekylen i tillstånd $|2>$ efter $2\,s$?

d) hitta molekylen i tillstånd $|1>$ *eller* tillstånd $|2>$ efter $t\,s$? (4p)

7) En elektron rör sig längs en linje och påverkas av potentialen $V(x) = 4$ eV för $x < 0$, $V(x) = 0$ eV för $0 < x < 5$, och $V(x) = 4$ eV för $x > 5$. (x är läget längs linjen mätt i Å.) Elektronen befinner sig i ett stationärt tillstånd med vågfunktionen $\varphi(x) = 0.2307e^{0.9217x}$ för $x < 0$, $\varphi(x) = 0.5281\sin(0.4476x + 0.4520)$ för $0 < x < 5$ och $\varphi(x) = 0.2307e^{-0.9217(x-5)}$ för $x > 5$. ($\varphi(x)$ är angiven i enheten $\text{Å}^{-1/2}$ och vågfunktionen uppfyller villkoret $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1$.)

a) Vad är sannolikheten att finna partikeln *utanför* potentialgropen (dvs i området $x < 0$ eller i området $x > 5$)? (3p)

b) Vad är partikelns energi E? (1p)

8) Elektroner har spinn 1/2 och spinnets z-komponent kan anta två värden $s_z = \pm\hbar/2$. Som bastillstånd kan man välja de två tillstånden $|+>$ och $|->$; då elektronen befinner sig i dessa tillstånd är z-komponenten av dess spinn $s_z = \pm\hbar/2$. Antag att elektronen befinner sig i tillståndet $|\psi> = \sqrt{\frac{3}{8}}(1-i)|+> + \frac{1}{\sqrt{8}}(1+i)|->$.

51

a) Vad är sannolikheten att finna elektronen i tillståndet $|+>$, dvs att man vid en mätning av z-komponenten av elektronens spinn finner $s_z = \hbar/2$? (1p)

b) Vad är sannolikheten att finna elektronen i tillståndet $|\phi> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+> + |->)$? (1p)

c) Elektronen passerar genom en apparat A som karakteriseras av $<+|A|+> = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $<+|A|->= -\frac{i}{2}$, $<-|A|+>= -\frac{i}{2}$, $<-|A|->= \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vad är sannolikheten att därefter finna elektronen i tillståndet $|+>$? (2p)

52

FORMELSAMLING – KVANTFYSIKENS PRINCIPER

Får användas på tentamen. Ingen annan formelsamling får användas.

$$E = \hbar\omega \qquad \vec{p} = \hbar\vec{k} \tag{1}$$

$$\Delta x \Delta p_x \approx h \tag{2}$$

$$f(\theta) \pm f(\pi - \theta) \tag{3}$$

$$< i|j >= \delta_{ij} \tag{4}$$

$$< \chi|\phi >= \sum_i < \chi|i >< i|\phi > \tag{5}$$

$$< \phi|\chi >=< \chi|\phi >^* \tag{6}$$

$$\sum_i |i >< i| = 1 \text{ (eller } |) \tag{7}$$

$$< \chi|A|\phi >= \sum_{i,j} < \chi|i >< i|A|j >< j|\phi > \tag{8}$$

$$|\phi >= \sum_i |i >< i|\phi >= \sum_i |i > c_i \tag{9}$$

$$< \phi| = \sum_i < \phi|i >< i| = \sum_i c_i^* < i| \tag{10}$$

$$|\psi >= A|\phi >= \sum_{i,j} |i >< i|A|j >< j|\phi > \tag{11}$$

$$\sum_i |c_i|^2 = 1 \tag{12}$$

$$i\hbar \frac{dc_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij} c_j(t) \tag{13}$$

$$H_{ij}^* = H_{ji} \tag{14}$$

53

$$H_{11} = H_{22} = E_0 \qquad H_{12} = H_{21} = -A \tag{15}$$

$$c_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 + A)t} \tag{16}$$

$$c_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 + A)t} \tag{17}$$

$$|\psi> = \int_{-\infty}^{\infty} |x><x|\psi> dx \tag{18}$$

$$\psi(x,t) = <x|\psi> \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1 \tag{20}$$

$$[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \tag{21}$$

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\phi(x) \tag{22}$$

$$[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)]\phi(x) = E\phi(x) \tag{23}$$

$$\phi(x) = a\sin(kx) + b\cos(kx)\ , \quad k = \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2} \quad \text{om } E > V_0 \tag{24}$$

$$\phi(x) = a\,e^{\kappa x} + b\,e^{-\kappa x}\ , \quad \kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2} \quad \text{om } E < V_0 \tag{25}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34} Js\ , \quad e = 1.60 \times 10^{-19} C \tag{26}$$

$$m_{elektron} = 9.11 \times 10^{-31} kg\ , \quad m_{proton} = m_{neutron} = 1.67 \times 10^{-27} kg \tag{27}$$

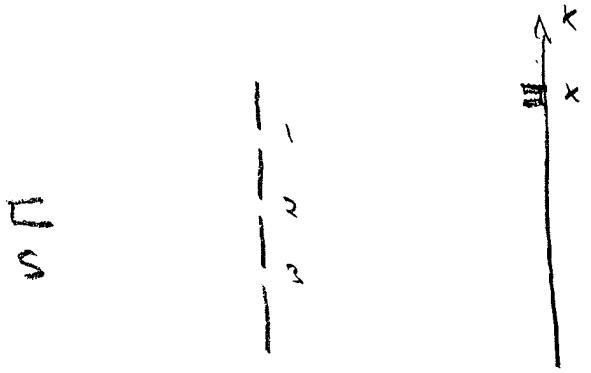
$$1\,\mathring{A} = 10^{-10}\,m\ , \quad 1\,eV = 1.60 \times 10^{-19} J \tag{28}$$

KVANTFYSIKENS PRINCIPER 970122 LÖSNINGAR

① Se Feynman.

(Observera att elektronen detekteras som 'klumpar', detta skiljer den från klassiska vågor.)

②



$\langle x|i\rangle$ amplituden för att elektronen skall gå från hål i till detektorn i x

$\langle i|s\rangle$ amplituden för att elektronen skall gå från sändaren s till hål i

(Sannolikhetsamplituden A för att elektronen skall gå från s till x är summan av amplituderna för de tre vägarna:

$$A = \langle x|s\rangle_{\text{via } 1} + \langle x|s\rangle_{\text{via } 2} + \langle x|s\rangle_{\text{via } 3} = \sum_{i=1}^{3} \langle x|i\rangle\langle i|s\rangle$$

Där vi använt att amplituden för en väg kan skrivas som produkten av amplituder för delar av vägen.

55

③ Efter att elektronen passerat spalten kände vi dess läge (i x-led) med en osäkerhet $\Delta x = 1 \cdot 10^{-10}$ m. Enligt Heisenbergs osäkerhetsrelation är osäkerheten i elektronens rörelsemängd (i x-led)

$$\Delta p_x \simeq \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1.05 \cdot 10^{-34}}{1 \cdot 10^{-10}} \frac{Js}{m} \simeq 1 \cdot 10^{-24} \ kg\, m/s$$

$$[J = kg\, m^2/s^2]$$

(Anm. Detta är en nedre gräns för Δp_x.)

④ Se Feynman

(Sammanfattning:

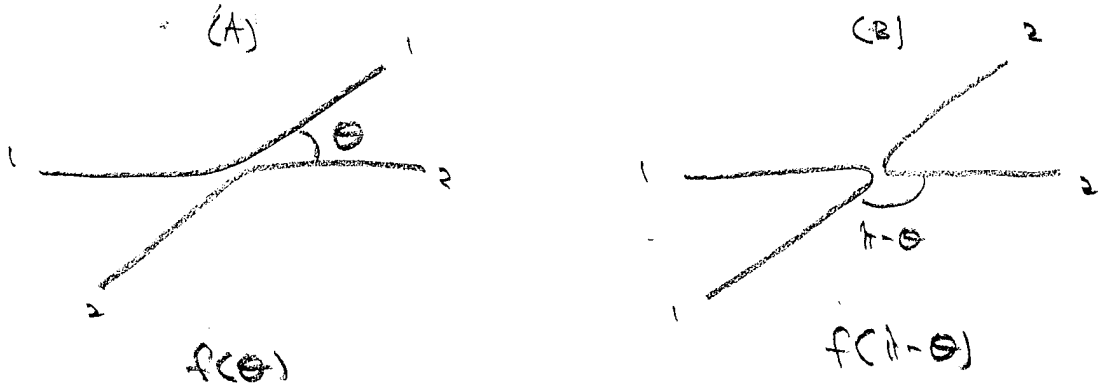
(a) $|+\rangle$ fås genom att blockera 2 av vägarna i SG apparaten.

(b) $\langle +|+\rangle = 1$ är amplituden för atten $|+\rangle$ atom (producerad som i (a)) går genom en andra identisk SG apparat.
$\langle -|+\rangle = 0$ är amplituden för att en $|+\rangle$ atom går genom en SG apparat där 0,+ är blockerade etc.

(c) $\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$ motsvarar att man sätter in en SG apparat där alla vägar är öppna (denna apparat 'gör ingenting').

56

(5) Om vi ritar ut de tänkta vägarna för partiklar 1 och 2 så har vi två möjligheter som ger spridning vinkeln Θ:



Här är $\Theta = \pi/2$ och vi söker sannolikheten P för att finna en partikel i detektorn.

a) Partiklar av olika typ

A och B kan ej skiljas åt och sannolikheterna skall adderas:

$$P = |f(\pi/2)|^2 + |f(\pi-\pi/2)|^2 = 2|f(\pi/2)|^2$$

b) Identiska bosoner

A och B kan ej skiljas åt, amplituderna adderas

$$P = |f(\pi/2) + f(\pi-\pi/2)|^2 = 4|f(\pi/2)|^2$$

c) Elektroner med spinnet i samma riktning

Som b) men amplituderna subtraheras ty fermion

$$P = |f(\pi/2) - f(\pi-\pi/2)|^2 = 0$$

d) Elektroner med spinnet i olika riktning (ej spinnflip)

Som a)

$$P = |f(\pi/2)|^2 + |f(\pi-\pi/2)|^2 = 2|f(\pi/2)|^2$$

57 (6) Enligt formelsamlingen:

$$\begin{cases} C_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 + A)t} \\ C_2(t) \qquad - \end{cases}$$

$$|\psi\rangle = C_1|1\rangle + C_2|2\rangle$$

$$A = -H_{12} = \hbar/2\hbar \ s^{-1}$$

$t=0$: $\quad |\psi\rangle = |1\rangle \qquad \begin{cases} C_1(0) = 1 \\ C_2(0) = 0 \end{cases} \qquad a = b = 1$

$$\begin{cases} C_1(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i}{\hbar}At} + e^{-\frac{i}{\hbar}At}\right) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \cos\frac{At}{\hbar} \\ C_2(t) \qquad - \qquad = i e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \sin\frac{At}{\hbar} \end{cases}$$

Sannolikheten att, vid mätning, finna molekylen i $|1\rangle$ ($|2\rangle$) är $|C_1(t)|^2$ ($|C_2(t)|^2$)

$$P_1(t) = |C_1(t)|^2 = \cos^2\frac{At}{\hbar} = \cos^2\frac{\pi t}{2s}$$

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \sin^2\frac{At}{\hbar} = \sin^2\frac{\pi t}{2s}$$

a) $P_2(0) = \sin^2 0 = 0$

(Följer också av att vi vet att molekylen är i (1) då $t=0$

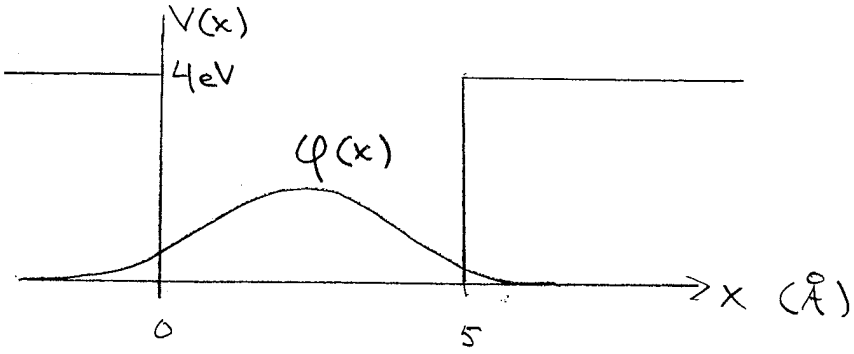
b) $P_2(1s) = \sin^2 \pi/2 = 1$

c) $P_2(2s) = \sin^2 \pi = 0$

c) $P_1(t) + P_2(t) = \cos^2\frac{\pi t}{2s} + \sin^2\frac{\pi t}{2s} = 1$

(<u>Att</u> Molekylen <u>måste</u> vara i ett av de två tillstånden: $P_1 + P_2 = 1$.)

58 (7)



$$\varphi(x) = \begin{cases} 0.2307\, e^{0.9217x} & x<0 \\ 0.5281 \sin(0.4476x + 0.4520) & 0<x<5 \\ 0.2307\, e^{-0.9217(x-5)} & \end{cases}$$

$\varphi(x)$ är vågfunktionen för ett stationärt tillstånd, dvs $\varphi(x)$ är en lösning till den tidsoberoende Schrödingerekvationen. Vågfunktionen har dimension $(\text{längd})^{-1/2}$ (eftersom sannolikheten $|\varphi(x)|^2 \Delta x$ är dimensionslös). $\varphi(x)$ är vågfunktionen i $Å^{-1/2}$.

a) $P(x<0)$ sannolikheten att, vid mätning, finna elektronen i området $x<0$

($P(x>0)$, $P(0<x<5)$ definieras på motsvarande sätt)

$$P(x<0) = \int_{-\infty}^{0} dx\, |\varphi(x)|^2 = 0.2307^2 \int_{-\infty}^{0} dx\, e^{1.8434x}$$

$$= \frac{0.2307^2}{1.8434} e^{1.8434x} \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{0.2307^2}{1.8434} = 0.0289$$

$$P(x>5) = \int_{5}^{\infty} dx\, |\varphi(x)|^2 = \dots = 0.0289$$ (lika med ty φ symmetrisk)

Svar: Sannolikheten är 0.058.

(Alt Beräkna $1 - P(0<x<5)$.)

7b) Energin ges av

$$k = \sqrt{2m(E-V_0)/\hbar^2} \qquad \text{((24) i formelsaml.)}$$

$$E = \frac{k^2\hbar^2}{2m} + V_0$$

Detta gäller om $E > V_0$, dvs i området $0 < x < 5$.
(Området känns igen på att $\varphi(x)$ är en oscillerande funktion där ($\sin kx$, $\cos kx$ och ej $e^{\pm \kappa x}$.

$$\varphi(x) = 0.5281 \sin(\underbrace{0.4476}_{k} k + 0.4520)$$

x i Å, kx dimensionslös (ty argument i sin (

$k = 0.4476\ \text{Å}^{-1}$

Eftersom $V_0 = 0$ fås

$$E = \frac{k^2\hbar^2}{2m} = \frac{0.4476^2 \cdot 10^{20} \cdot 1.05^2 \cdot 10^{-68}}{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} \frac{m^{-2} J^2 s^2}{kg}$$

$$= 1.21 \cdot 10^{-19}\ J = \frac{1.21}{1.60}\ eV = 0.76\ eV$$

Svar: Energin är 0.76 eV

Anm $\varphi(x) = a \sin(kx + \delta)$

$= A \sin kx + B \cos kx$

$a \sin(kx+\delta)$ är alltså ett alternativt sätt att skriva den allmänna lösningen då $V(x) = V_0$ konst och $E > V_0$.

60

(8) $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{8}}(1-i)|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}(1+i)|-\rangle$

$$\begin{cases} \langle +|+\rangle = \langle -|-\rangle = 1 \\ \langle +|-\rangle = \langle -|+\rangle = 0 \end{cases}$$

($|+\rangle, |-\rangle$ är en bas av tillstånd)

a) Sannolikheten att finna elektronen i $|+\rangle$ är

$$P_+ = |\langle +|\psi\rangle|^2 = \left|\sqrt{\frac{3}{8}}(1-i)\right|^2 = \frac{3}{8}\cdot 2 = \frac{3}{4}$$

b) Sannolikheten att finna elektronen i $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ är

$$P_\phi = |\langle \phi|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{8}}(1-i) + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{8}}(1+i)\right|^2$$

$$= \frac{1}{16}\left|\sqrt{3}(1-i) + (1+i)\right|^2 = \frac{1}{16}\left[(\sqrt{3}+1)^2 + (1-\sqrt{3})^2\right] = \frac{1}{2}$$

c) Före apparaten är elektronen i tillståndet $|\psi\rangle$.

Efter — " — $|\chi\rangle = A|\psi\rangle$

Då är sannolikheten att finna elektronen i $|+\rangle$:

$$P = |\langle +|\chi\rangle|^2 = |\langle +|A|\psi\rangle|^2 = \sum_{i=\pm} |\langle +|A|i\rangle\langle i|\psi\rangle|^2$$

$$= |\langle +|A|+\rangle\langle +|\psi\rangle + \langle +|A|-\rangle\langle -|\psi\rangle|^2$$

$$= \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{3}{8}}(1-i) - \frac{i}{2}\frac{1}{\sqrt{8}}(1+i)\right|^2$$

$$= \frac{1}{32}\left|3(1-i) - i + 1\right| = \frac{1}{32}|4-4i| = \frac{4^2+4^2}{32} = \underline{1}$$