42

Tentamen i Kvantfysikens Principer 970616

Tillåtna hjälpmedel: utdelad fomelsamling och miniräknare. Var noga med att motivera dina lösningar! Lycka till! *Anders Karlhede*

1) Antag att man använder ett dubbelspaltexperiment för att mäta elektroninterferens och man använder en uppställning där skärmen står 1 meter från dubbelspalten och spalterna är på avståndet 1 mm. Vad blir avståndet mellan interferensmaxima om elektronens våglängd är 1 Ångström? (4p)

2) Hur lyder Heisenbergs osäkerhetsrelation för en partikel som rör sig längs en linje? Förklara noga vad relationen innebär, gärna med ett exempel! (4p)

3) I ett experiment skjuts partiklar från en källa S mot en skärm med tre hål. Ge ett uttryck för sannolikheten för att observera en partikel i en punkt x på en andra skärm bakom den första om man observerar ett av hålen så att man vet om en partikel har passerat genom detta hål eller inte. (4p)

4) En atom kan befinna sig i fyra möjliga stationära tillstånd med energierna $E_1 = 1eV$, $E_2 = 3eV$, $E_3 = 7eV$, $E_4 = 14eV$. Bestäm de möjliga frekvenserna på det ljus som kan a) absorberas och b) emitteras av systemet! (4p)

5) Två partiklar a och b sprids till tillstånden 1 och 2 så att en partikel hamnar i vardera tillståndet. (De båda partiklarna antas ha samma spinn och detta ändras ej under processen.) Ge ett uttryck för sannolikheten för denna process (uttryckt i enpartikelamplituderna $\langle a|1\rangle, \langle a|2\rangle, \langle b|1\rangle$ och $\langle b|2\rangle$) om

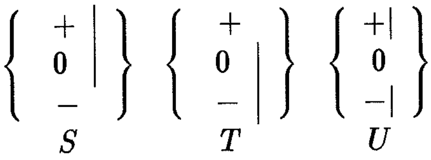
   a) partiklarna är olika (1p)

   b) partiklarna är identiska bosoner (1p)

   c) partiklarna är identiska fermioner. (1p)

   d) Vad blir sannolikheterna i a), b) och c) om 1 och 2 är samma tillstånd? (1p)

6) Betrakta följande apparat (som är sammansatt av tre Stern-Gerlach apparater i olika riktningar och där atomerna kommer från vänster):



a) Vad är amplituden i Diracs notation svarande mot apparaten ovan? (1p)

b) I vilket tillstånd befinner sig atomerna efter passage av apparaten? (1p)

c) Om $S = T = U$, dvs om de tre apparaterna har samma riktning, vad blir sannolikheten att en atom passerar hela apparaten (de inkommande atomerna antas opolariserade)? (1p)

d) Vad blir amplituden, i Diracs notation, om T apparaten ovan ersätts av en apparat där endast spinn ned ($-$) vägen är blockerad? (1p)

7) Betrakta en elektron som befinner sig i en endimensionell låda med längden 10 Å, dvs en elektron som rör sig i potentialen $V(x) = 0$ om $0 < x < 10$ Å och $V = \infty$ för övrigt.

a) Bestäm vågfunktionen och energin för grundtillståndet! (2p)

b) Hur stor är sannolikheten att vid en mätning finna elektronen i området $0 \leq x \leq 2$ Å? (2p)

8) En elektron befinner sig i ett magnetfält B som pekar i z-riktningen. Låt $|+\rangle$ vara det tillstånd där elektronen har spinn upp mätt i z-riktningen och $|-\rangle$ det tillstånd där elektronen har spinn ner mätt i z-riktningen. Med dessa beteckningar ges Hamiltons matris H av $H_{++} = \mu_B B$, $H_{+-} = H_{-+} = 0$, $H_{--} = -\mu_B B$, där $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}$ är *Bohrmagnetonen.*

a) Antag att elektronen vid tiden $t = 0$ befinner sig i tillståndet $\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$). I vilket tillstånd befinner sig elektronen vid tiden t? (3p)

43

b) Vad är sannolikheten att vid en mätning vid tiden t finna elektronen med spinn upp (i tillståndet $|+\rangle$) om den vid tiden $t = 0$ befinner sig i tillståndet $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$? (1p)

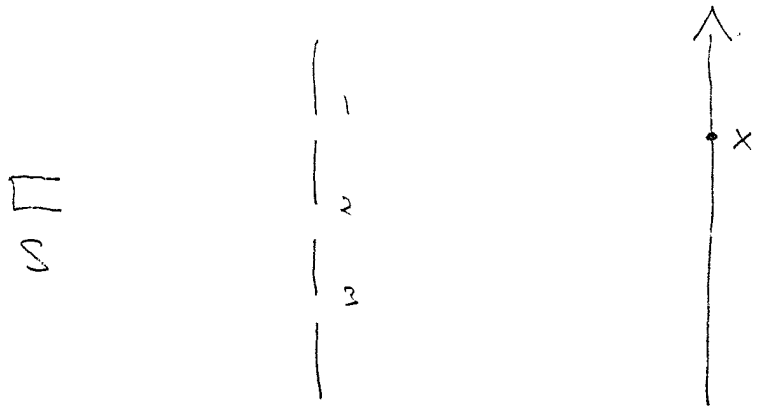
KVANTFYSIKENS PRINCIPER 970616 LÖSNINGAR

① Avståndet mellan maxima är $L\lambda/d$

$$L\lambda/d = \frac{1\,m \cdot 1\,Å}{1\,mm} = 1 \cdot 10^{-7}\,m = 0{,}1\,\mu m$$

② Se Feynman

③



Antag att hål 1 observeras.

Sannolikheten för att en partikel skall gå från källan S till punkten x blir då

$$P = |\langle x|1\rangle\langle 1|S\rangle|^2 + |\langle x|2\rangle\langle 2|S\rangle + \langle x|3\rangle\langle 3|S\rangle|^2$$

(4) En atom kan absorbera eller emittera ljus med frekvens ν och energin $h\nu$ svarande mot skillnaden ΔE mellan energierna för två stationära tillstånd

$$h\nu = \Delta E$$

$$\Delta E = 2, 4, 6, 7, 11, 13 \text{ eV}$$

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$\Delta E = 1$ eV ger $\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{2\pi \cdot 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 2.4 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$

Motsvarande våglängd är $\lambda = c/\nu = 1.2 \cdot 10^{-6}$ m

De möjliga frekvenserna är

2, 4, 6, 7, 11 resp. 13 gånger $2.4 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$.

(5)

a) $P_d = |\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle|^2 + |\langle 2|a\rangle\langle 1|b\rangle|^2$

b) $P_b = |\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle + \langle 1|b\rangle\langle 2|a\rangle|^2$

c) $P_f = |\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle - \langle 1|b\rangle\langle 2|a\rangle|^2$

d) $|1\rangle = |2\rangle$ ger $P_d = 2|\langle 1|a\rangle\langle 1|b\rangle|^2$

$P_b = 4|\langle 1|a\rangle\langle 1|b\rangle|^2$

$P_f = 0$

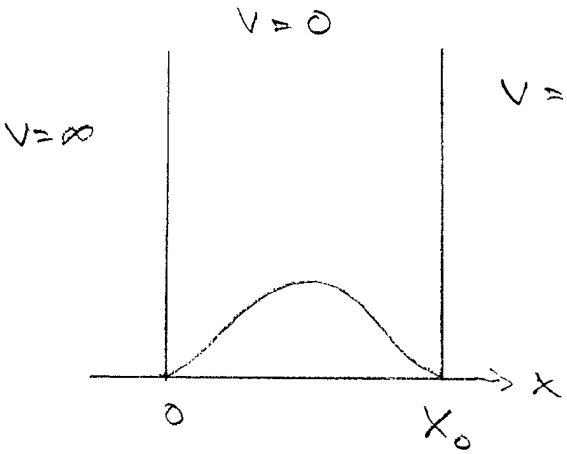
(6) a) $\langle U0|T+\rangle\langle T+|S-\rangle$

b) $|U0\rangle$

c) 0

d) $\langle U0|T+\rangle\langle T+|S-\rangle + \langle U0|T0\rangle\langle T0|S-\rangle$

(7)



$x_0 = 10\,\text{Å}$

a) Enligt formelsamlingen:

$$\begin{cases} \varphi(x) = a\sin kx + b\cos kx, & k = \sqrt{2mE}/\hbar \quad \text{i lådan} \\ \varphi(x) = 0 & \text{utanför lådan} \end{cases}$$

φ kontinuerlig i $x = 0, x_0$

$$\varphi(0) = \varphi(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow b = 0, \quad k_n x_0 = n\cdot\pi \quad n = 1, 2, \ldots$$

Energin är $E_n = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$n = 1$ ger lägst energi (grundtillstånd)

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mx_0^2} = \frac{1.05^2\cdot 10^{-68}\,\pi^2}{2\cdot 9.11\cdot 10^{-31}\cdot 10^2\cdot 10^{-20}}\,\frac{J^2 s^2}{kg\cdot m^2} = 0.60\cdot 10^{-19}\,J$$

$= 3.7\ \text{eV}$

47 Vågfunktionen är

$$\underline{\varphi(x) = a \sin kx}, \qquad 0 < x < x_0 \quad ; \quad k = \pi / x_0$$

a bestäms av $\int_0^{x_0} |\varphi(x)|^2 dx = 1$

$$1 = a^2 \int_0^{x_0} \sin^2 kx \, dx = \frac{a^2}{2} \int_0^{x_0} [1 - \cos 2kx] dx$$

$$= a^2 \left\{ \frac{x_0}{2} - \frac{1}{4k} \cancel{\sin 2kx \Big|_0^{x_0}}^{\to 0} \right\}$$

$$= a^2 \frac{x_0}{2}$$

$$\underline{a = \sqrt{2/x_0} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{Å}^{-1/2}}$$

b) Sannolikheten att finna elektronen i området $0 \le x \le b$, $b = 2$ Å är

$$\underline{P} = \int_0^b |\varphi(x)|^2 dx$$

$$= \frac{2}{x_0} \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{4k} \sin 2kb \right)$$

$$= \underline{0.049}$$

⑧ 48

Enligt formelsamlingen:

$$i\hbar \frac{dc_i}{dt} = \sum_j H_{ij} c_j$$

Allmänt tillstånd: $|\psi(t)\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{dc_+}{dt} = H_{++}c_+ + H_{+-}c_- = \mu_B B c_+ \\ i\hbar \dfrac{dc_-}{dt} = H_{--}c_- + H_{-+}c_+ = -\mu_B B c_- \end{cases}$$

Lösningen är

$$\begin{cases} c_+(t) = c_+(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\mu_B B t} \\ c_-(t) = c_-(0)\, e^{\frac{i}{\hbar}\mu_B B t} \end{cases}$$

(jfr formelsaml.)

a) $|\psi(0)\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle \Rightarrow c_+(0) = \alpha,\ c_-(0) = \beta$

Vid tiden t befinner sig elektronen i tillståndet $|\psi\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \alpha e^{-\frac{i}{\hbar}\mu_B B t}|+\rangle + \beta e^{\frac{i}{\hbar}\mu_B B t}|-\rangle$$

b) $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \Rightarrow \alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$

Sannolikheten att finna elektronen i $|+\rangle$ vid tiden t är $|c_+(t)|^2 = |\alpha|^2 = 1/2$.