

## Tentamen i Kvantfysikens Principer 980121

Tillåtna hjälpmedel: utdelad fomelsamling och miniräknare. Var noga med att *motivera* dina lösningar! Lycka till! *Anders Karlhede*

- 1) Ge ett uttryck för sannolikhetsamplituden för att en elektron skall ta sig från en källa  $s$  till en detektor i  $x$  om den på vägen måste passera tre skärmar med vardera två stycken hål i. Antag att man inte kan avgöra vilka hål elektronen passerar genom. Uttryck amplituden i amplituder för delar av vägarna, från  $s$  till skärm  $a$ :  $\langle a, i | s \rangle$  där  $i = 1, 2$  etc. Förklara vad de införda amplituderna betyder. (4p)
- 2) Antag att man har ett stort antal väteatomer som alla befinner sig i grundtillståndet. I detta tillstånd är väteatomens radie ungefär en Bohrradie  $a_0 = 0.53 \text{ Å}$ . För varje atom mäter man elektronens fart  $v$  (farten  $v$  är beloppet av hastigheten  $\vec{v}$ :  $v = |\vec{v}|$ ). Antag att mätfelet är så litet att det kan försummas. Kommer man då att finna samma värde på farten  $v$  för de olika atomerna? Motivera! Om svaret är nej, uppskatta spridningen,  $\Delta v$ , i mätvärdena! (4p)
- 3) Beskriv kortfattat vad som händer i dubbelspaltexperimentet med elektroner då man med en lampa belyser spalterna för att undersöka vilken spalt elektronerna går genom! Hur beror resultatet av ljusets intensitet? Hur beror resultatet av ljusets våglängd? (4p)
- 4) Då en gas hettas upp sänder den ut ljus. Om man låter detta ljus passera ett prisma så kommer man att se ett spektrum bestående av ett antal ljusa linjer mot en mörk bakgrund. Om man istället skickar vitt ljus (dvs ljus av alla våglängder) genom samma gas och sedan låter detta ljus passera ett prisma fås ett spektrum bestående av en serie mörka linjer mot en ljus bakgrund. Förklara dessa fenomen genom att redogöra för vad som händer med atomerna i gasen då de sänder ut respektive tar emot ljus! Varför ser man diskreta linjer? Varför hamnar de ljusa och de mörka linjerna på samma ställen? (Ledning: De olika linjerna motsvarar ljus av olika våglängd eftersom ett prisma böjer av ljus med olika våglängder olika mycket.) (4p)
- 5) Vad är amplituderna, i Diracs notation, för nedanstående kombinationer av Stern-Gerlach apparater? ( $S, T, U$  anger apparaternas rikt-

ning och atomerna passerar apparaterna från vänster till höger.) Ange, i de fall detta är möjligt, vad amplituderna är!

a)

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \\ S \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \\ S \end{array} \right\}$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \\ S \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \\ S \end{array} \right\}$$

c)

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \\ S \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \\ T \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \\ U \end{array} \right\}$$

d)

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \\ S \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \\ T \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \\ S \end{array} \right\}$$

6) En partikel med spinn 1 befinner sig i tillståndet  $|\psi\rangle = |+\rangle_{\frac{1}{2}} + |0\rangle_{\frac{1}{2}} + |-\rangle_{\frac{1}{2}}$ . Ange sannolikheten för att vid en mätning finna partikeln i nedanstående tillstånd:

a)  $|+\rangle$

b)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$

c)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + i|0\rangle)$

d)  $|+\rangle_{\frac{1}{2}} + |0\rangle_{\frac{1}{2}} + |-\rangle_{\frac{1}{2}}$ . (4p)

7) Antag att en ammoniakmolekyl befinner sig i tillståndet  $|1\rangle$  vid tiden  $t = 0$ . Beräkna sannolikheten för att ammoniakmolekylen befinner sig i tillståndet  $|1\rangle$  vid tiden  $t$ ! (4p)

8) En elektron befinner sig i en endimensionell låda med längden  $10 \text{ \AA}$ , dvs elektronen rör sig i potentialen  $V(x) = 0$  om  $0 < x < 10 \text{ \AA}$  och  $V = \infty$  för övrigt.

- a) Bestäm vågfunktionen och energin för det tillstånd som har *näst* lägst energi! (2p)
- b) Hur stor är sannolikheten att vid en mätning finna elektronen i området  $0 \leq x \leq 2 \text{ \AA}$ ? (2p)



# FORMELSAMLING – KVANTFYSIKENS PRINCIPER

Får användas på tentamen. Ingen annan formelsamling får användas.

$$E = \hbar\omega \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} \quad (1)$$

$$\Delta x \Delta p_x \approx h \quad (2)$$

$$f(\theta) \pm f(\pi - \theta) \quad (3)$$

$$\langle i|j \rangle = \delta_{ij} \quad (4)$$

$$\langle \chi|\phi \rangle = \sum_i \langle \chi|i \rangle \langle i|\phi \rangle \quad (5)$$

$$\langle \phi|\chi \rangle = \langle \chi|\phi \rangle^* \quad (6)$$

$$\sum_i |i \rangle \langle i| = 1 \text{ (eller } |) \quad (7)$$

$$\langle \chi|A|\phi \rangle = \sum_{i,j} \langle \chi|i \rangle \langle i|A|j \rangle \langle j|\phi \rangle \quad (8)$$

$$|\phi \rangle = \sum_i |i \rangle \langle i|\phi \rangle = \sum_i |i \rangle c_i \quad (9)$$

$$\langle \phi| = \sum_i \langle \phi|i \rangle \langle i| = \sum_i c_i^* \langle i| \quad (10)$$

$$|\psi \rangle = A|\phi \rangle = \sum_{i,j} |i \rangle \langle i|A|j \rangle \langle j|\phi \rangle \quad (11)$$

$$\sum_i |c_i|^2 = 1 \quad (12)$$

$$i\hbar \frac{dc_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}c_j(t) \quad (13)$$

$$H_{ij}^* = H_{ji} \quad (14)$$

$$H_{11} = H_{22} = E_0 \quad H_{12} = H_{21} = -A \quad (15)$$

$$c_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \quad (16)$$

$$c_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \quad (17)$$

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x|\psi\rangle dx \quad (18)$$

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi\rangle \quad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (20)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (21)$$

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \phi(x) \quad (22)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right] \phi(x) = E\phi(x) \quad (23)$$

$$\phi(x) = a \sin(kx) + b \cos(kx), \quad k = \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2} \quad \text{om } E > V_0 \quad (24)$$

$$\phi(x) = a e^{\kappa x} + b e^{-\kappa x}, \quad \kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2} \quad \text{om } E < V_0 \quad (25)$$

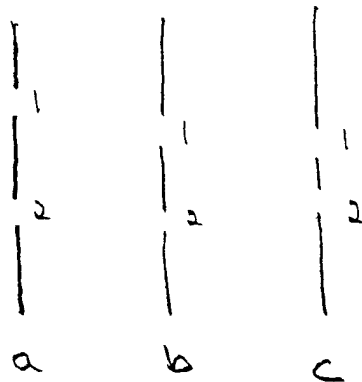
$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34} Js, \quad e = 1.60 \times 10^{-19} C \quad (26)$$

$$m_{elektron} = 9.11 \times 10^{-31} kg, \quad m_{proton} = m_{neutron} = 1.67 \times 10^{-27} kg \quad (27)$$

$$1 \text{ \AA} = 10^{-10} m, \quad 1 eV = 1.60 \times 10^{-19} J \quad (28)$$

①

S



$\langle x | c k \rangle$  amplituden för att elektronen skall gå från hål  $k=1,2$  i skärm c till detektor i x

$\langle c k | b l \rangle$  amplituden för att elektronen skall gå från hål  $l$  i skärm b till hål  $k$  i skärm c

$\langle b l | a m \rangle$  pss

$\langle a m | s \rangle$  amplituden för att elektronen skall gå från källan s till hål m i skärm a

Sannolikhetsamplituden A för att elektronen skall gå från s till x är summan av amplituderna för de  $2 \times 2 \times 2 = 8$  vägar:

$$A = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \langle x | c k \rangle \langle c k | b l \rangle \langle b l | a m \rangle \langle a m | s \rangle$$

②

Nej, man finner olika  $v$  för de olika atomerna  
Spridningen  $\Delta v$  ges av Heisenbergs  
osäkerhetsrelation:

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} \approx \frac{h}{m \Delta x}$$

$\Delta x$  är osäkerheten i mätning av elektrons  
läge. Eftersom elektronen är  
'instängd' inom ett område av den  
ungefärliga radien  $a_0$ , så gäller

$$\Delta x \lesssim a_0.$$

Vi får alltså

$$\begin{aligned} \Delta v &\approx \frac{h}{m \Delta x} \gtrsim \frac{h}{m a_0} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 0.53 \cdot 10^{-10} \text{ kg}\cdot\text{m}} \\ &= 1.36 \cdot 10^7 \text{ m/s} \\ &\therefore \underline{\underline{\approx 1 \cdot 10^7 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

③ Se Feynman



38 ④ Se Fysikman kap 2-5

En gas består av atomer (eller molekyler) som kan ha vissa bestämda energier (energin är kvantiserad). En atom skickar ut ljus av frekvensen  $\omega$  då den går från en högre energinivå  $E_1$  till en lägre  $E_2$  och

$$h\omega = E_1 - E_2$$

Ljuset våglängd är  $\lambda = \frac{c}{\omega} = \frac{2\pi c}{\omega}$  ( $c$  är ljushastigheten).

Eftersom  $E_1, E_2$  bara anta vissa diskreta värden så får bara ljus av vissa bestämda  $\omega$  (och  $\lambda$ ). Detta ger ljusa linjer.

Absorption av ljus är den 'omvända' processen: atomer går från  $E_2$  till  $E_1$  och absorberar energin  $E_2 - E_1$ . Man får därför mörka linjer för samma  $\lambda$  som man har ljusa linjer i förtä fallet

$$\textcircled{5} \quad a) \quad \langle S_- | S_+ \rangle = 0$$

$$b) \quad \langle S_+ | S_+ \rangle = 1$$

$$c) \quad \langle U_0 | T_+ \rangle \langle T_+ | S_+ \rangle$$

$$d) \quad \sum_i \langle S_0 | T_i \rangle \langle T_i | S_+ \rangle = \langle S_0 | S_+ \rangle = 0$$

$$\textcircled{6} \quad |4\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

Sannolikheten att finna en partikel som är i tillståndet  $|4\rangle$  i tillståndet  $|\varphi\rangle$  är

$$P = |\langle \varphi | 4 \rangle|^2$$

$$a) \quad P = |\langle + | 4 \rangle|^2 = \frac{1}{4}$$

$$b) \quad P = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle + | + \langle - |) \left( \frac{1}{2}|+\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \right) \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right|^2 = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$c) \quad P = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle + | - i \langle 0 |) \left( \frac{1}{2}|+\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \right) \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{2\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{8} (1 - i)^2 = \frac{1}{8} (1 + 1) = \frac{1}{4}$$

$$d) \quad |\varphi\rangle = |4\rangle : \quad P = |\langle 4 | 4 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right|^2 = 1$$

All  $P=1$  följer av att  $|\varphi\rangle = |4\rangle$ .

⑦

Enligt formelsamlingen är de allmänna lösningarna för  $\text{NH}_3^-$ :

$$|2(t)\rangle = C_1(t) |1\rangle + C_2(t) |2\rangle$$

$$\begin{cases} C_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \\ C_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \end{cases}$$

$\text{NH}_3^-$  i tillstånd  $|1\rangle$  då  $t=0$ :  $|2(0)\rangle = |1\rangle$ .

Detta bestämmer  $a$  och  $b$ :

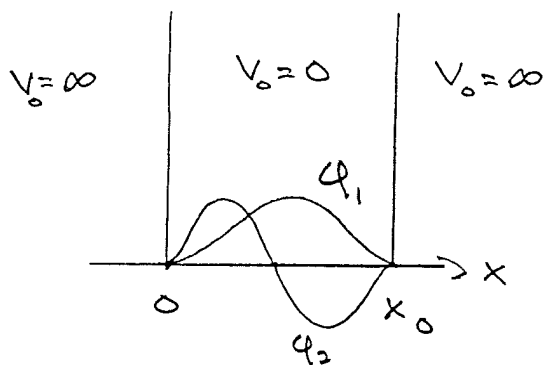
$$\begin{cases} C_1(0) = 1 \\ C_2(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 1 \\ \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \quad a=b=1$$

Sannolikheten att finna  $\text{NH}_3^-$  i tillståndet  $|1\rangle$  vid tiden  $t$  är

$$\begin{aligned} P_1(t) &= |C_1(t)|^2 = \left| \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t} \right|^2 \left| e^{\frac{i}{\hbar}At} + e^{-\frac{i}{\hbar}At} \right|^2 \\ &= \left| \cos^2 \frac{At}{\hbar} \right|^2 \\ &= \cos^2 \frac{At}{\hbar} \end{aligned}$$

(Koll:  $t=0$  ger  $P_1(0) = \cos^2 0 = 1$  OK)

8



$$x_0 = 10 \text{ \AA}$$

a)

Enligt formelsamlingen:

$$\begin{cases} \psi(x) = a \sin kx + b \cos kx, & k = \sqrt{2mE}/\hbar \quad \text{i ledaren} \\ \psi(x) = 0 & \text{utanför ledaren (där } V_0 = \infty \end{cases}$$

$\psi$  kontinuerlig i  $x=0, x_0$ :

$$\psi(0) = \psi(x_0) = 0 \Rightarrow b = 0; \quad kx_0 = n\pi \quad n=1, 2, \dots$$

$$\text{Energin: } E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m x_0^2} \quad n=1, 2, \dots$$

$n=1$  är grundtillståndet.

$n=2$  är tillståndet med näst lägst energi:

$$E_2 = \frac{4\hbar^2 \pi^2}{2m x_0^2} = \frac{4 \cdot 1.05^2 \cdot 10^{-68} \text{ J}^2 \text{ s}^2}{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 10^2 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2} = 2.4 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (= 1.5 \text{ eV})$$

Vågfunktionen är:

$$\psi_2(x) = \begin{cases} a \sin k_2 x & k_2 = \frac{2\pi}{x_0} \quad 0 < x < x_0 \\ 0 & x < 0, \quad x_0 < x \end{cases}$$

40 8 forh

a) bestäm av:  $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_2(x)|^2 dx = 1$

$$1 = a^2 \int_0^{x_0} \sin^2 k_2 x dx = \frac{a^2}{2} \int_0^{x_0} [1 - \cos 2k_2 x] dx$$

$$= a^2 \left\{ \frac{x_0}{2} - \frac{1}{4k_2} \sin 2k_2 x \right\} \Big|_0^{x_0}$$

$$= a^2 \frac{x_0}{2}$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{5}} A^{-1/2}$$

b) Samolikheten att finna elektronen i området  $0 \leq x \leq b$ ,  $b = 2 \text{ \AA}$  är

$$P = \int_0^b |\varphi_2(x)|^2 dx$$

$$= \frac{2}{x_0} \left( \frac{b}{2} - \frac{1}{4k_2} \sin 2k_2 b \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left( 1 - \frac{10}{8 \text{ \AA}} \sin \frac{8 \text{ \AA}}{10} \right)$$

$$= 0.15$$

