27

Tentamen i Kvantfysikens Principer 980615

Tillåtna hjälpmedel: utdelad fomelsamling och miniräknare. Var noga med att *motivera* dina lösningar! Lycka till! *Anders Karlhede*

1) I ett experiment skjuts partiklar från en källa S mot en skärm med fyra hål i. Ge ett uttryck för sannolikheten för att observera en partikel i en punkt x på en andra skärm bakom den första om det vid två av hålen finns detektorer som avgör om partikeln passerar ett av dessa båda hål. (4p)

2) Hur lyder Heisenbergs osäkerhetsrelation för en partikel som rör sig längs en linje? Förklara noga vad relationen innebär, gärna med ett exempel! (4p)

3) Betrakta följande apparat (som är sammansatt av tre Stern-Gerlach apparater i olika riktningar och där atomerna kommer från vänster):

$$\underset{S}{\left\{\begin{array}{c} +| \\ 0 \\ -| \end{array}\right\}} \quad \underset{T}{\left\{\begin{array}{c} + \\ 0| \\ - \end{array}\right\}} \quad \underset{U}{\left\{\begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array}\Big|\right\}}$$

   a) Vad är amplituden i Diracs notation svarande mot apparaten ovan? (1p)

   b) I vilket tillstånd befinner sig atomerna efter passage av apparaten? (1p)

   c) Beskriv den fysikaliska apparat som

$$\underset{S}{\left\{\begin{array}{c} +| \\ 0 \\ -| \end{array}\right\}}$$

   betecknar! (2p)

4) *Bosoner och fermioner*

   a) Vad innebär det att partiklar är bosoner respektive fermioner? (1p)

b) För vilka spinn är en partikel en boson respektive en fermion? (1p)

c) En He atom består av en kärna och två elektroner. Kärnan består av två protoner och två neutroner (^4He) eller av två protoner och en neutron (^3He). Är ^3He- respektive ^4He-atomerna bosoner eller fermioner? (2p)

5) *Neutronspridning i kristall*

Neutroner skjuts mot en kristall och böjs av vinkeln θ; låt $f(\theta)$ vara antalet neutroner som böjs av vinkeln θ. Antag att neutronerna från början har spinn upp (neutroner har spinn $s = 1/2$ och kan alltså ha spinn upp eller spinn ner). Skissa funktionen $f(\theta)$ och förklara vad som händer om:

a) atomkärnorna i kristallen saknar spinn (dvs $s = 0$)

b) atomkärnorna i kristallen har spinn $s = 1/2$ och alla har spinn ner (innan de kolliderar med en neutron). (4p)

Ledning: En neutron kolliderar med en atomkärna i kristallen och ändrar därvid sin riktning. Neutronen har så låg energi att atomkärnan i kristallen inte påverkas, förutom att atomkärnan och neutronen kan byta spinnriktning. (Alla atomkärnor i kristallen antas vara lika.)

6) Elektroner har spinn 1/2 och spinnets z-komponent kan anta två värden $s_z = \pm\hbar/2$. Som bastillstånd kan man välja de två tillstånden $|\pm\rangle$; då elektronen befinner sig i dessa tillstånd är z-komponenten av dess spinn $s_z = \pm\hbar/2$. Antag att elektronen befinner sig i tillståndet $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle + i\frac{\sqrt{3}}{2}|-\rangle$.

a) Vad är sannolikheten att finna elektronen i tillståndet $|+\rangle$, dvs att man vid en mätning av z-komponenten av elektronens spinn finner $s_z = \hbar/2$?

b) Vad är sannolikheten att finna elektronen i tillståndet $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$?

c) Antag att man har många elektroner som var och en befinner sig i tillståndet $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle + i\frac{\sqrt{3}}{2}|-\rangle$ och att man mäter s_z för var och en av elektronerna. Vad blir *medelvärdet* av s_z? (Medelvärdet är lika

med summan av alla mätvärden dividerad med antalet partiklar.) (4p)

7) En partikel befinner sig i ett tillstånd med vågfunktionen $\psi(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$. Visa att denna vågfunktion är en lösning till (den tidsoberoende) Schrödingerekvationen för någon potential $V(x)$. Bestäm $V(x)$ och partikelns energi E! (4p)

8) *Neutrinons massa*

Helt nyligen kom vad som synes vara ett svar på den viktiga frågan huruvida neutriner har massa eller inte. Det var Kamiokandeexperimentet i Japan som den 5 juni meddelade att man, med stor sannolikhet, observerat neutrinernas massa!

Kosmisk strålning träffar jordens atmosfär varvid nya partiklar bildas. Bland dessa finns μ-neutriner, låt $|\mu\rangle$ vara tillståndet dessa befinner sig i. Neutriner påverkas mycket lite av materia och kan passera rakt genom jorden. När man räknar antalet neutriner som passerat jorden (efter att ha bildats i atmosfären på andra sidan) finner man ändå att en del av μ-neutrinerna har försvunnit! Eftersom neutrinerna påverkas så lite av materia så kan detta inte bero på att de absorberats av jorden. Förklaringen tros istället vara att μ-neutrinerna har omvandlats till en annan sorts neutriner (låt oss kalla dem x-neutriner). I själva verket tros partiklarna oscillera mellan att vara μ- och x-neutriner i tillstånd $|\mu\rangle$ respektive $|x\rangle$. Detta beror på att $|\mu\rangle$ och $|x\rangle$ inte är stationära tillstånd utan vart och ett är en superposition av två stationära tillstånd med energier E_1 respektive E_2. (Detta är helt analogt med ammoniakmolekylen: tillstånden $|\mu\rangle$ och $|x\rangle$ motsvarar att kväveatomen befinner sig på ena respektive andra sidan i molekylen.)

Antag att 10% av μ-neutrinerna försvinner och att sannolikheten att μ-neutrinon har energi E_1 är 1/2 (och sannolikheten att den har energi E_2 är 1/2). Antag vidare att neutrinerna rör sig med ljusets hastighet ($3 \cdot 10^8$ m/s) genom jorden (jordens diameter är $1,3 \cdot 10^7$ m). Bestäm skillnaden i energi, $E_1 - E_2$, mellan de två stationära tillstånden! (4p)

Ledning: Jämför med ammoniakmolekylen!

Kommentar: Enligt Einstein beror en partikels energi på dess massa, man kan med hjälp av detta från energiskillnaden beräkna skillnaden i

kvadraten på massorna. Eftersom denna inte är noll, så är inte heller massorna noll. Alltså visar experimentet att neutriner har massa.

27

FORMELSAMLING – KVANTFYSIKENS PRINCIPER

Får användas på tentamen. Ingen annan formelsamling får användas.

$$E = \hbar\omega \qquad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \tag{1}$$

$$\Delta x \Delta p_x \approx h \tag{2}$$

$$f(\theta) \pm f(\pi - \theta) \tag{3}$$

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} \tag{4}$$

$$\langle \chi|\phi\rangle = \sum_i \langle \chi|i\rangle\langle i|\phi\rangle \tag{5}$$

$$\langle \phi|\chi\rangle = \langle \chi|\phi\rangle^* \tag{6}$$

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1 \text{ (eller } |) \tag{7}$$

$$\langle \chi|A|\phi\rangle = \sum_{i,j} \langle \chi|i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|\phi\rangle \tag{8}$$

$$|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle c_i \tag{9}$$

$$\langle \phi| = \sum_i \langle \phi|i\rangle\langle i| = \sum_i c_i^* \langle i| \tag{10}$$

$$|\psi\rangle = A|\phi\rangle = \sum_{i,j} |i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|\phi\rangle \tag{11}$$

$$\sum_i |c_i|^2 = 1 \tag{12}$$

$$i\hbar \frac{dc_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij} c_j(t) \tag{13}$$

$$H_{ij}^* = H_{ji} \tag{14}$$

$$H_{11} = H_{22} = E_0 \qquad H_{12} = H_{21} = -A \tag{15}$$

$$c_1(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \tag{16}$$

$$c_2(t) = \frac{a}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \tag{17}$$

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|\psi\rangle dx \tag{18}$$

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi\rangle \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1 \tag{20}$$

$$[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} \tag{21}$$

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\phi(x) \tag{22}$$

$$[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)]\phi(x) = E\phi(x) \tag{23}$$

$$\phi(x) = a\sin(kx) + b\cos(kx)\ , \quad k = \sqrt{2m(E-V_0)/\hbar^2} \quad \text{om } E > V_0 \tag{24}$$

$$\phi(x) = a\,e^{\kappa x} + b\,e^{-\kappa x}\ , \quad \kappa = \sqrt{2m(V_0-E)/\hbar^2} \quad \text{om } E < V_0 \tag{25}$$

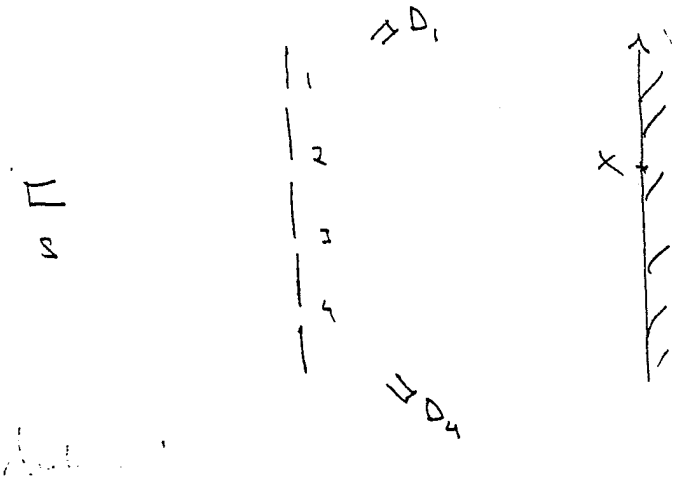
$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34} Js\ , \quad e = 1.60 \times 10^{-19} C \tag{26}$$

$$m_{elektron} = 9.11 \times 10^{-31} kg\ , \quad m_{proton} = m_{neutron} = 1.67 \times 10^{-27} kg \tag{27}$$

$$1\,\mathring{A} = 10^{-10}\,m\ , \quad 1\,eV = 1.60 \times 10^{-19} J \tag{28}$$

KVANTFYSIKENS PRINCIPER 980615 LÖSNINGAR

(1)



Antag hål 1 och 4 observeras. Sannolikheten att observera en partikel i punkten x är då

$$S = |\langle x|1\rangle\langle 1|s\rangle|^2 + |\langle x|2\rangle\langle 2|s\rangle + \langle x|3\rangle\langle 3|s\rangle|^2 + |\langle x|4\rangle\langle 4|s\rangle|^2$$

— x —

(2) Se Feynman

— x —

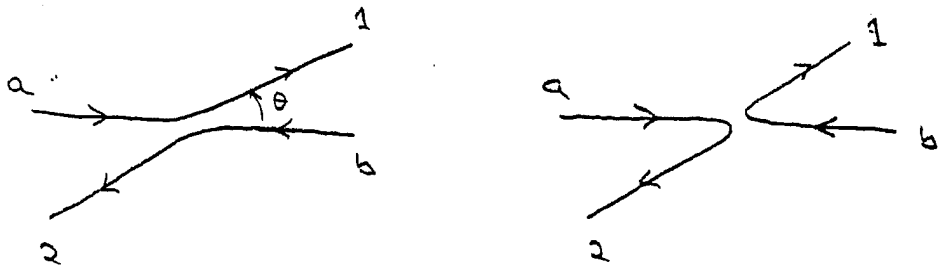
(3) a) $\langle +U|+T\rangle\langle +T|0S\rangle + \langle +U|-T\rangle\langle -T|0S\rangle$

b) $|+U\rangle$

c) Se Feynman (Stern-Gerlach apparat)

— x —

(4) a) Spridning av 2 identiska partiklar a,b till 1,2:



$\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle = f(\theta)$ $\qquad$ $\langle 2|a\rangle\langle 1|b\rangle = f(\pi-\theta)$

 4a forts

Amplituden för spridningen är

$\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle + \langle 2|a\rangle\langle 1|b\rangle$ bosoner

$\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle - \langle 2|a\rangle\langle 1|b\rangle$ fermioner

b) Bosoner har heltaligt spinn: $s = 0, 1, 2, \ldots$
Fermioner har halvtaligt spinn: $s = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$

c) En sammansatt partikel är en fermion om och endast om den har ett udda antal delar som är fermioner.

^4He: $2p + 2n + 2e$ 6 fermioner Boson

^3He: $2p + 1n + 2e$ 5 fermioner Fermion

— x —

(5) Se Feynman

— x —

(6) $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle + i\frac{\sqrt{3}}{2}|-\rangle$

a) Sannolikheten att finna elektronen i tillståndet $|+\rangle$ är $P_+ = \frac{|\langle +|\psi\rangle|^2}{|\langle\psi|\psi\rangle|^2}$

$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + (i\frac{\sqrt{3}}{2})(-i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$\langle +|\psi\rangle = \frac{1}{2}$; $P_+ = \frac{1}{4}$

Svar: Sannolikheten är $P_+ = \frac{1}{4}$

32 6b) Sannolikheten är $P_\phi = \frac{|\langle\phi|\psi\rangle|^2}{|\langle\psi|\psi\rangle|^2} = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$

$$\langle\phi|\psi\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -|\right]\left[\frac{1}{2}|+\rangle + i\frac{\sqrt{3}}{2}|-\rangle\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$P_\phi = \frac{1}{8}|1+i\sqrt{3}|^2 = \frac{1}{8}(1+3) = \frac{1}{2}$$

Svar: Sannolikheten är $P_\phi = \frac{1}{2}$

c) Sannolikheten för $S_z = +\hbar/2$ är $P_+ = \frac{1}{4}$ och för $S_z = -\hbar/2$ är den $P_- \equiv 1 - P_+ = \frac{3}{4}$

Medelvärdet är $\bar{S}_z = \frac{1}{4}\cdot\hbar/2 + \frac{3}{4}\cdot(-\hbar/2) = -\hbar/4$

Svar: Medelvärdet är $\bar{S}_z = -\hbar/4$

— x —

7 $\psi(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = -\frac{m\omega}{\hbar}x\,\psi(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -\frac{m\omega}{\hbar}\left[\psi(x) + x\frac{d\psi}{dx}\right] = -\frac{m\omega}{\hbar}\left[1 - \frac{m\omega}{\hbar}x^2\right]\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\psi = \frac{\hbar\omega}{2}\psi$$

Detta är Schrödingerekvationen för en partikel i potentialen $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ och med energin $E = \frac{\hbar\omega}{2}$.

(8) Låt $|\psi(t)\rangle$ vara partikelns tillstånd vid tiden t. Detta kan skrivas som en superposition av de två stationära tillstånden $|I\rangle$ och $|II\rangle$ (med energier E_1 resp E_2)

$$|\psi(t)\rangle = \alpha\, e^{-iE_1 t/\hbar}|I\rangle + \beta\, e^{-iE_2 t/\hbar}|II\rangle$$

$\underline{t=0}$: $\quad |\mu\rangle = |\psi(0)\rangle = \alpha|I\rangle + \beta|II\rangle$

$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ty sannolikheten att μ-neutrino har energi E_1 (E_2) är $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$).

Sannolikheten att partikeln vid tiden t är en μ-neutrino (dvs bestämmer sig i tillståndet $|\mu\rangle$) är:

$$P_\mu(t) = \frac{|\langle\mu|\psi(t)\rangle|^2}{|\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle|^2} = |\langle\mu|\psi(t)\rangle|^2$$

$$= \left|\tfrac{1}{2}e^{-iE_1 t/\hbar} + \tfrac{1}{2}e^{-iE_2 t/\hbar}\right|^2 =$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[1 + 1 + e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar} + e^{i(E_1-E_2)t/\hbar}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[1 + \cos\frac{(E_1-E_2)t}{\hbar}\right] = 1 - \sin^2\frac{(E_1-E_2)t}{2\hbar} = \cos^2\frac{(E_1-E_2)t}{2\hbar}$$

34 8 forts

$P_\mu = 0.9$ 10% sln att μ-neutrinon försvinner

$$t = D/c = \frac{1.3 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8}\,s = 0.043\ s$$

$$\cos^2 \frac{(E_1 - E_2)t}{2\hbar} = 0.9$$

$$\frac{(E_1 - E_2)t}{2\hbar} = 0.3218 + n \cdot \pi \qquad n = 0, \pm 1, \ldots$$

#

$$E_1 - E_2 = \frac{0.3218 \cdot 2 \cdot 1.05 \cdot 10^{-34}\,Js}{0.043\,s} = 1.57 \cdot 10^{-33}\,J$$

$$= 0.98 \cdot 10^{-14}\ eV$$

Svar: Energiskillnaden är $0.98 \cdot 10^{-14}$ eV

Kommentarer

Vi har här valt $n = 0$ som ger den minsta energiskillnaden.

För mer detaljer om detta problem se t.ex. Bahcall 'Neutrino Astrophysics' s 247 – 258.