

Tentamen i Kvantfysikens Principer 990120

Tillåtna hjälpmedel: utdelad fomelsamling och miniräknare. Var noga med att *motiv*era dina lösningar! Lycka till! *Anders Karlhede*

- 1) I ett experiment skjuts partiklar från en källa S mot en skärm med tre hål i . Ge ett uttryck för sannolikheten för att observera en partikel i en punkt x på en andra skärm bakom den första om:

- a) inget av de tre hålen observeras.
- b) det vid hål ett finns en detektor som avgör om partikeln passerar hål ett och om det vid hål två finns en detektor som avgör om partikeln passerar hål två. (4p)

(Uttryck sannolikheterna i amplituder $\langle x|i \rangle$ och $\langle i|S \rangle$ och förklara vad dessa amplituder betyder.)

- 2) Elektroner skjuts i x -riktningen från långt håll mot ett hål i en skärm i yz -planet. Hålet har diametern $1 \cdot 10^{-10} m$. Man mäter varje elektrons rörelsemängd i y -riktningen efter skärmen och beräknar medelvärdet och spridningen (osäkerheten) i denna rörelsemängd. Ge en uppskattning av a) medelvärdet och b) spridningen. (Medelvärdet är lika med summan av alla mätvärden dividerad med antalet partiklar.) (4p)
- 3) Beskriv kortfattat vad som händer i dubbelspaltexperimentet med elektroner då man med en lampas belyser spalterna för att undersöka vilken spalt elektronerna går genom! Hur beror resultatet av ljusets intensitet? Hur beror resultatet av ljusets våglängd? (4p)
- 4) En opolariserad stråle partiklar med spinn 1 skjuts mot en sammansatt apparat som består av en serie Stern-Gerlach apparater. Den första apparaten, S , har enbart $+$ vägen öppen, den andra, T , har enbart 0 vägen öppen, medan den sista, U , har enbart $-$ vägen öppen.

- a) Beskriv den sammansatta apparaten med Feynmans beteckningar,

$$\left\{ \begin{array}{c} +| \\ 0 \\ -| \end{array} \right\} \text{ etc.}$$

- b) Vad är amplituden i Diracs notation, $\langle | \rangle$, svarande mot den sammansatta apparaten?

- c) I vilket tillstånd befinner sig atomerna efter passage av den sammansatta apparaten?
- d) Ersätt den sista apparaten med en apparat där alla tre vägarna är öppna. I vilket tillstånd befinner sig atomerna efter passage av den nya sammansatta apparaten? (4p)
- 5) Välj *ett* av fenomenen: laser, Bose-Einstein kondensation, periodiska systemet eller fermitryck i stjärnor och beskriv *kortfattat* fenomenet, var särskilt noga med att redogöra för vad fenomenet har att göra med identiska partiklar och varför fenomenet fungerar enbart för bosoner eller enbart för fermioner. (4p)
- 6) En atom med spinn 2 befinner sig i tillståndet $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|2\rangle + \frac{i}{\sqrt{5}}|1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|-2\rangle$. ($|m\rangle$, $m = 2, 1, 0, -1, -2$ är bastillstånd; spinnets komponent i $\hat{z}$ -riktningen är $s_z = m\hbar$ då atomen befinner sig i tillståndet $|m\rangle$.)
- a) Vad är sannolikheten att man vid mätning av spinnets $\hat{z}$ -komponent finner $s_z = 2\hbar$?
- b) Vad är sannolikheten att man vid mätning av spinnets $\hat{z}$ -komponent finner att spinnet pekar i positiva z -riktningen (dvs $s_z > 0$)?
- c) Vad är sannolikheten att finna atomen i tillståndet $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|2\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle$?
- d) Antag att man har många atomer som var och en befinner sig i tillståndet $|\psi\rangle$ och att man mäter s_z för var och en av atomerna. Vad blir *medelvärdet* av s_z ? (Medelvärdet är lika med summan av alla mätvärden dividerad med antalet atomer.) (4p)
- 7) Betrakta en elektron som befinner sig i en endimensionell låda med längden $5 \text{ \AA}$, dvs en elektron som rör sig i potentialen $V(x) = 0$ om $0 < x < 5 \text{ \AA}$ och $V = \infty$ för övrigt.
- a) Bestäm vågfunktionerna och energierna för de två tillstånd som har lägst energi.
- b) I vilken, eller vilka, punkter i lådan är sannolikheten störst, respektive minst, att finna elektronen i de två tillstånden? (4p)

8) *Neutrinons massa*

Den 5 juni 1998 kom vad som synes vara ett svar på den viktiga frågan huruvida neutriner har massa eller inte. Det var Kamiokandeexperimentet i Japan som meddelade att man, med stor sannolikhet, observerat neutronernas massa!

Kosmisk strålning träffar jordens atmosfär varvid nya partiklar bildas. Bland dessa finns μ -neutriner, låt $|\mu\rangle$ vara tillståndet dessa befinner sig i. Neutriner påverkas mycket lite av materia och kan passera rakt genom jorden. När man räknar antalet neutriner som passerat jorden (efter att ha bildats i atmosfären på andra sidan) finner man ändå att en del av μ -neutrinerna har försvunnit! Eftersom neutriner påverkas så lite av materia så kan detta inte bero på att de absorberats av jorden. Förklaringen tros istället vara att μ -neutrinerna har omvandlats till en annan sorts neutriner (låt oss kalla dem x -neutriner). I själva verket tros partiklarna oscillera mellan att vara μ - och x -neutriner i tillstånd $|\mu\rangle$ respektive $|x\rangle$. Detta beror på att $|\mu\rangle$ och $|x\rangle$ inte är stationära tillstånd utan vart och ett är en superposition av två stationära tillstånd med energier E_1 respektive E_2 . (Detta är helt analogt med ammoniakmolekylen: tillstånden $|\mu\rangle$ och $|x\rangle$ motsvarar att kväveatomen befinner sig på ena respektive andra sidan i molekylen.)

Antag att 10% av μ -neutrinerna försvinner då de passerar genom jorden och att amplituden för att μ -neutrinon har energi E_1 är $1/\sqrt{2}$ (och amplituden för att den har energi E_2 är $1/\sqrt{2}$). Antag vidare att neutriner rör sig med ljusets hastighet ($3 \cdot 10^8$ m/s) genom jorden (jordens diameter är $1,3 \cdot 10^7$ m). Bestäm (minsta möjliga) skillnaden i energi, $E_1 - E_2$, mellan de två stationära tillstånden! (4p)

Ledning: Jämför med ammoniakmolekylen!

Kommentar: Enligt Einstein beror en partikels energi på dess massa, man kan med hjälp av detta från energiskillnaden beräkna skillnaden i kvadraten på massorna. Eftersom denna inte är noll, så är inte heller massorna noll. Alltså visar experimentet att neutriner har massa.

FORMELSAMLING – KVANTFYSIKENS PRINCIPER

Får användas på tentamen. Ingen annan formelsamling får användas.

$$E = \hbar\omega \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (1)$$

$$\Delta x \Delta p_x \approx h \quad (2)$$

$$f(\theta) \pm f(\pi - \theta) \quad (3)$$

$$\langle i|j \rangle = \delta_{ij} \quad (4)$$

$$\langle \chi|\phi \rangle = \sum_i \langle \chi|i \rangle \langle i|\phi \rangle \quad (5)$$

$$\langle \phi|\chi \rangle = \langle \chi|\phi \rangle^* \quad (6)$$

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = 1 \text{ (eller } |) \quad (7)$$

$$\langle \chi|A|\phi \rangle = \sum_{i,j} \langle \chi|i \rangle \langle i|A|j \rangle \langle j|\phi \rangle \quad (8)$$

$$|\phi \rangle = \sum_i |i\rangle \langle i|\phi \rangle = \sum_i |i\rangle c_i \quad (9)$$

$$\langle \phi| = \sum_i \langle \phi|i \rangle \langle i| = \sum_i c_i^* \langle i| \quad (10)$$

$$|\psi \rangle = A|\phi \rangle = \sum_{i,j} |i\rangle \langle i|A|j \rangle \langle j|\phi \rangle \quad (11)$$

$$\sum_i |c_i|^2 = 1 \quad (12)$$

$$i\hbar \frac{dc_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij} c_j(t) \quad (13)$$

$$H_{ij}^* = H_{ji} \quad (14)$$

$$H_{11} = H_{22} = E_0 \quad H_{12} = H_{21} = -A \quad (15)$$

$$c_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \quad (16)$$

$$c_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t} \quad (17)$$

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x|\psi\rangle dx \quad (18)$$

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi\rangle \quad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (20)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (21)$$

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \phi(x) \quad (22)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right] \phi(x) = E\phi(x) \quad (23)$$

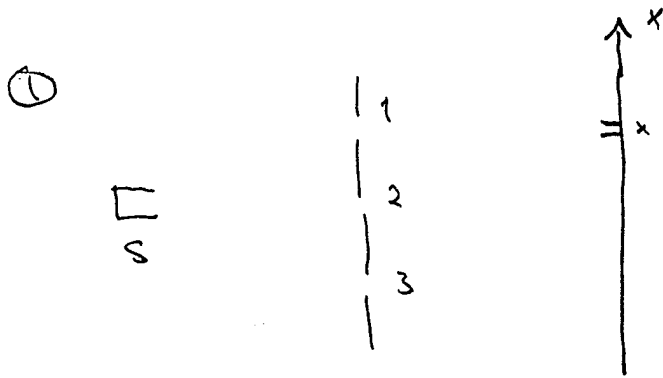
$$\phi(x) = a \sin(kx) + b \cos(kx), \quad k = \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2} \quad \text{om } E > V_0 \quad (24)$$

$$\phi(x) = a e^{\kappa x} + b e^{-\kappa x}, \quad \kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2} \quad \text{om } E < V_0 \quad (25)$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34} Js, \quad e = 1.60 \times 10^{-19} C \quad (26)$$

$$m_{elektron} = 9.11 \times 10^{-31} kg, \quad m_{proton} = m_{neutron} = 1.67 \times 10^{-27} kg \quad (27)$$

$$1 \text{ \AA} = 10^{-10} m, \quad 1 eV = 1.60 \times 10^{-19} J \quad (28)$$

KVANTFYSIKENS PRINCIPER 990120 LÖSNINGAR

$\langle x|i \rangle$ amplituden för att partikeln skall gå från hål i till detektorn i x .

$\langle i|s \rangle$ amplituden för att partikeln skall gå från källan s till hål i .

a) Om inget av hålen observeras får sannolikheten genom att addera amplituderna för de tre vägarna:

$$P = |\langle x|1 \rangle \langle 1|s \rangle + \langle x|2 \rangle \langle 2|s \rangle + \langle x|3 \rangle \langle 3|s \rangle|^2$$

Där vi använt att amplituden för en väg kan skrivas som produkten av amplituden för delar av vägen.

b) Om man kan avgöra vilka partiklar som passerat hål 1 och vilka som passerat hål 2, får totala sannolikheten som summan av tre sannolikheter (en för varje hål)

$$P = |\langle x|1 \rangle \langle 1|s \rangle|^2 + |\langle x|2 \rangle \langle 2|s \rangle|^2 + |\langle x|3 \rangle \langle 3|s \rangle|^2$$

②



a) Före hålet gäller $p_y = 0$. Efter hålet är $p_y \neq 0$, men pga symmetrin i problemet är värdens p_y symmetriska runt 0 och alltså blir medelvärdet, $\bar{p}_y$, noll: $\bar{p}_y = 0$

b) Heisenbergs osäkerhetsrelation ger att spridningen, Δp_y , i rörelsemängden efter hålet är

$$\Delta p_y \approx \frac{h}{\Delta y} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{1 \cdot 10^{-10} \text{ m}} = \underline{1 \cdot 10^{-24} \text{ kg m/s}}$$

$$[J = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2]$$

③

Se Feynman

④ a) $\begin{matrix} \left\{ \begin{smallmatrix} + \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right\} & \left\{ \begin{smallmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right\} & \left\{ \begin{smallmatrix} + \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right\} \\ S & T & U \end{matrix}$

b) $\langle -U | 0T \rangle \langle 0T | +S \rangle$

c) $| -U \rangle$ (Tillståndet bestäms av den sista apparaten inbakt.)

d) En helt öppen apparat har ingen effekt och kan tas bort, vi får

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{smallmatrix} + \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right\} & \left\{ \begin{smallmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right\} \\ S & T \end{matrix}$$

och atomerna är i tillståndet $| 0T \rangle$

(jfr c)

⑤ Se Feynman, kompendiet och utdelat material.

$$⑥ \quad |4\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |2\rangle + \frac{i}{\sqrt{5}} |1\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} |-2\rangle$$

a) Sannolikheten är

$$P_2 = |\langle 2|4\rangle|^2 = \frac{1}{5}$$

b) Sannolikheten är summan av sannolikheterna att spinnet är $S_z = 2\hbar$ och $S_z = \hbar$:

$$P_{>0} = P_2 + P_1 = |\langle 2|4\rangle|^2 + |\langle 1|4\rangle|^2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

c) Sannolikheten att finna atomer i tillståndet $|\Phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |2\rangle + \frac{i}{2} |1\rangle$ är

$$\begin{aligned} P_\Phi &= |\langle \Phi|4\rangle|^2 = \left| \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \langle 2| - \frac{i}{2} \langle 1| \right) |4\rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{i}{2} \frac{i}{\sqrt{5}} \right|^2 = \frac{1}{20} |\sqrt{3} + 1|^2 = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{3}}{10} \end{aligned}$$

d) Medelvärdet $\bar{S}_z$ är summan av sannolikheterna P_m för $S_z = m\hbar$ multiplicerade med motsvarande $m\hbar$:

$$\bar{S}_z = \sum_{m=-2}^2 P_m \cdot m\hbar = \sum_{m=-2}^2 |\langle m|4\rangle|^2 m\hbar$$

$$= \left(\frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot (-2) \right) \hbar$$

$$= -\frac{3}{5} \hbar$$

⑦ forts

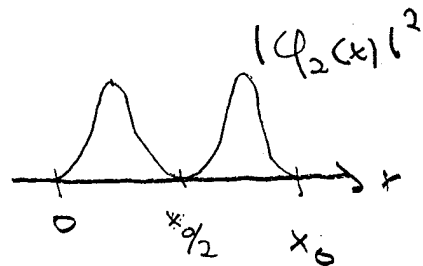
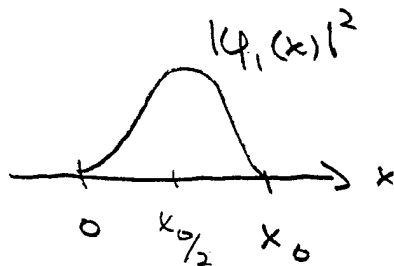
(a bestäms ur $1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = \int_0^{x_0} |\varphi(x)|^2 dx$

$$1 = a^2 \int_0^{x_0} \sin^2 \frac{n\pi x}{x_0} dx = \frac{a^2}{2} \int_0^{x_0} [1 - \cos \frac{2n\pi x}{x_0}] dx$$

$$= \frac{a^2}{2} \left\{ x_0 - \frac{x_0}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{x_0} \right\} \Big|_0^{x_0} = \frac{a^2 x_0}{2}$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{x_0}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ Å}^{-1/2}$$

b) Samolikhetstätheten (sannolikheten att finna partikeln i punkten x') ges av $|\varphi(x)|^2$.
Euklast är att rita en figur

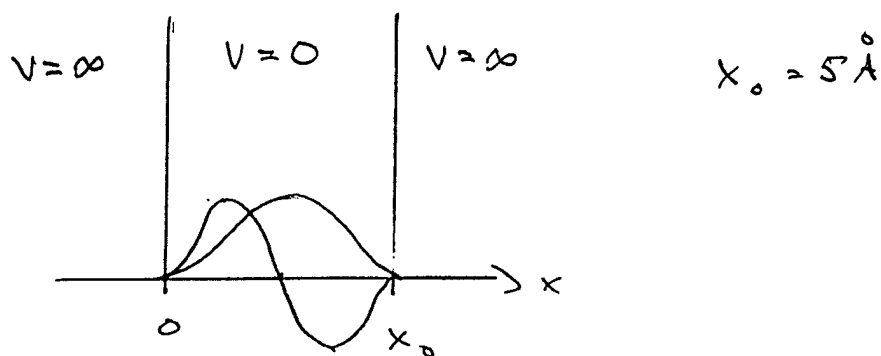


Sannolikheten störst där $|\varphi_n(x)|^2$ har maximum
minst minimum

$\varphi_1(x)$: Störst och i $x = x_0/2 = 2,5 \text{ Å}$, minst i $x = 0,5 \text{ Å}$

$\varphi_2(x)$: Störst och i $x = x_0/4 = 1,25 \text{ Å}$ och $x = 3x_0/4 = 3,75 \text{ Å}$
och minst i $x = 0, 2,5 \text{ Å}$ och 5 Å .

7



a) Enligt formelsamlingen

$$\begin{cases} \varphi(x) = a \sin kx + b \cos kx, & k = \sqrt{2mE} / \hbar \quad \text{i lådan} \\ \varphi(x) = 0 & \text{utanför lådan (där } V = \infty) \end{cases}$$

φ kontinuerlig i $x = 0, x_0$

$$\varphi(0) = \varphi(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow b = 0, \quad kx_0 = n\pi \quad n = 1, 2, \dots$$

Energier är $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$n=1$ ger lägst energi:

$$\varphi_1(x) = a \sin \frac{\pi x}{x_0} = a \sin \left(\frac{\pi x}{5 \text{ \AA}} \right)$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m x_0^2} = \frac{(1,05 \cdot 10^{-34})^2 \pi^2 7^2 \text{ s}^2}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 5^2 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2} = 2,4 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ &= 1,5 \text{ eV} \end{aligned}$$

$n=2$ ger näst lägst energi

$$\varphi_2(x) = a \sin \frac{2\pi x}{x_0} = a \sin \frac{2\pi x}{5 \text{ \AA}}$$

$$E_2 = \frac{4\hbar^2 k^2}{2m x_0^2} = 4E_1 = 6,0 \text{ eV}$$

8) So 980615.10