

Tentamensskrivning i kvantfysik, delkurs II, 8 p

Måndagen den 11 november 2002 kl. 12.30 – 18.30

Hjälpmedel: Physics Handbook och räknare.

Motivera varje steg i lösningarna. Ange antaganden och eventuella approximationer. Observera att en klar och tydlig redogörelse kan ge poäng även om uppgiften inte är helt löst. Observera vidare att du fritt kan använda all tänkbar information från handboken, om inte annat sägs. Lycka till!

D.L., P.-E.T.

1. En viss modell av den s.k. starka växelverkan (bindningskraften) mellan en proton och en neutron beskrivs av en Hamiltonoperator som bl.a. innehåller en spinnberoende term med formen

$$H_{spin} = \frac{A}{\hbar^2} \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_n$$

där $\mathbf{S}_p$ är protonens spinn (operator), $\mathbf{S}_n$ är neutronens spinn (operator) och A en konstant med dimensionen energi. Beräkna egenvärdena till operatoren H_{spin} . (Ledning: för att skriva om H_{spin} på lämpligt sätt, starta från $\mathbf{S} = \mathbf{S}_p + \mathbf{S}_n$.)

2. En partikel med massan m rör sig i en sfäriskt symmetrisk potential $V(r) = (m\omega^2/2) r^2$ där ω är en konstant med dimensionen frekvens, och $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Visa att den första exciterade energinivån är trefaldigt degenererad. Beräkna dess energi, och ange explicita uttryck för de tre degenererade, ortogonala och normerade tillstånden. (Ledning: använd lämpligen cartesiska koordinater – inte sfäriska. Separera!)

3. Kaliumisotopen ^{40}K är radioaktiv med en halveringstid på $1,277 \times 10^9$ år och ingår i naturligt kalium med andelen 0,0117% (övriga isotoper är de stabila ^{39}K , 93,2581%, och ^{41}K , 6,7302%).

- a) Beräkna aktiviteten som härrör från kalium i en människas kropp. Av kroppens massa utgörs ca 0,2 % av kalium.
b) Gör en rimlig uppskattning av hur mycket energi per tidsenhet som absorberas i kroppen pga denna aktivitet. Antag att sönderfallet är ett rent β^- -sönderfall.

4. En väteatom befinner sig i tillståndet

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R_{21}(r) \left(\sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^0(\theta, \varphi) \uparrow + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^1(\theta, \varphi) \downarrow \right)$$

där $R_{nl}(r)$ är väteatomens normerade radialvågfunktioner, $Y_l^m(\theta, \varphi)$ klotytefunktioner samt $\uparrow$ och $\downarrow$ spinorer motsvarande spinn upp respektive spinn ner längs z-axeln.

- a) Vid en mätning, vilka värden kan erhållas på kvadraten av banrörelsemängdsmomentet (L^2) och av dess z-komponent (L_z)? Ange också med vilka sannolikheter dessa värden erhålles.
b) Vid en mätning, vilka värden kan erhållas på kvadraten av det totala rörelsemängdsmomentet (J^2) och dess z-komponent (J_z)?
(Påminnelse: operatoren för det totala rörelsemängdsmomentet $\mathbf{J}$ är summan av operatorerna för banrörelsemängdsmoment och spinn, dvs $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.)

* 5.

- a) Två identiska bosoner, vardera med massan m och spinn $= 0$, rör sig längs x -axeln och befinner sig i en en-dimensionell potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 < x < a \\ \infty & \text{övriga } x \end{cases}$$

Först kan vi anta att de två partiklarna inte växelverkar med varann, dvs de rör sig oberoende av varandra i denna potential. Systemet (dvs de två partiklarna i potentialen $V(x)$) befinner sig i grundtillståndet. Ange den explicita, normerade vågfunktionen för systemet (uttryckt i partiklarnas koordinater x_1 och x_2) samt (med kort motivering) grundtillståndets energi.

- b) Nu antar vi att de två bosonerna fortfarande rör sig i ovan nämnda potential, men att de *dessutom* växelverkar med (påverkar) varann. Växelverkan beskrivs av en potential

$$V'(x_1 - x_2) = \begin{cases} -V_0 & \text{om } |x_1 - x_2| < \varepsilon \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Vi antar att $V_0 > 0$, dvs växelverkan är attraktiv. Vidare antas att $\varepsilon \ll a$, dvs växelverkan har mycket kort räckvidd. En praktisk *modell* för denna växelverkan är

$$V'(x_1 - x_2) = -\varepsilon V_0 \delta(x_1 - x_2)$$

där δ är Diracs delta-funktion (du kan använda denna modell). Vi antar att växelverkan är så pass svag att den kan behandlas som en störning. Beräkna med första ordningens störningsteori ändringen av grundtillståndets energi.

- c) Anta nu att de två partiklarna är *fermioner* med spinn $\frac{1}{2}$. Först antar vi att partiklarna inte växelverkar, och att systemet befinner sig i sin *näst* lägsta energinivå, dvs i sin första *exciterade* energinivå. Vågfunktionen kan separeras i en rumsdel och en spinndel och är en egenfunktion till kvadraten av det totala spinnet $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ med egenvärdet $2\hbar^2$. Ange, med kort motivering, systemets energi.

Nu antar vi att de två fermionerna växelverkar, och att växelverkan beskrivs av modellen i uppgift (b) och kan behandlas som en störning. Visa att systemets energi enligt första ordningens störningsteori *inte* påverkas av partiklarnas växelverkan.

Hjälp för uppgift 5:
$$\iint g(x_1, x_2) \delta(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 = \int g(x_1, x_1) dx_1$$

$$\int \sin^4 x dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$$

2. Vid en analys av uranmalm fann man att den innehöll ^{238}U och ^{206}Pb i viktsförhållandena 1 : 0,1639. Antag att hela blymängden härstammar från ^{238}U och att de radioaktiva kärnorna befinner sig i jämvikt.

- Beräkna mineralets ålder.
- Betrakta en bit malm som innehåller 1 kg ^{238}U . Hur stor massa ^{226}Ra innehåller biten?
- Betrakta samma bit malm som i uppgift b). Hur mycket heliumgas (ange massan) per år produceras i denna bit.

Ledning: Sönderfallskedjan för ^{238}U innehåller bl.a. dessa steg (med halveringstider inom parentes): ^{238}U ($4,47 \times 10^9$ år) $\rightarrow \dots \rightarrow ^{226}\text{Ra}$ (1600 år) $\rightarrow \dots \rightarrow ^{206}\text{Pb}$ (stabil).

Lösning:

- Antalet urankärnor vid tiden t ges av sönderfallslagen:

$$N_U(t) = N_U(t=0) \exp(-t \ln 2 / t_{1/2}).$$

För varje urankärna som sönderfaller bildas (till slut) en kärna av ^{206}Pb (uran har den längsta halveringstiden, kärnorna befinner sig i jämvikt), d.v.s. antalet blykärnor är vid tiden t :

$$N_{\text{Pb}}(t) = N_U(t=0) - N_U(t) = N_U(t) [\exp(t \ln 2 / t_{1/2}) - 1] \text{ eller}$$

$$N_{\text{Pb}}(t) / N_U(t) = [\exp(t \ln 2 / t_{1/2}) - 1] = \{\text{enl uppgiften}\} = 0,1639 \frac{238}{206} \Rightarrow t = 1,12 \times 10^9 \text{ år}.$$

- Jämvikt (M betecknar atommassan, m betecknar totala massan):

$$N_U(t) \omega_U = N_{\text{Ra}}(t) \omega_{\text{Ra}}$$

$$\Rightarrow m_{\text{Ra}} = M_{\text{Ra}} N_{\text{Ra}} = M_{\text{Ra}} N_U \frac{\omega_U}{\omega_{\text{Ra}}} = \frac{M_{\text{Ra}}}{M_U} m_U \frac{t_{1/2}(\text{Ra})}{t_{1/2}(\text{U})} \approx \frac{226 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 1600 \text{ år}}{238 \cdot 4,47 \times 10^9 \text{ år}} = 3,4 \times 10^{-7} \text{ kg}$$

- Sönderfallen i kedjan utgörs av successiva alfa- eller betasönderfall. Alfapartikeln utgör heliums atomkärna. Vid betasönderfall ändras inte masstalet, vid alfasönderfall ändras masstalet med 4 enheter. Sönderfallet går från $A=238$ till $A=206$, dvs $(238-206)/4=8$ alfapartiklar emitteras per sönderfallande urankärna. Massan m_{He} av den heliumgas som bildas per år är därför:

$$m_{\text{He}} = 8 M_{\text{He}} \omega_U N_U \cdot 1 \text{ år} = 8 \frac{M_{\text{He}}}{M_U} \omega_U \cdot 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ år} \approx 8 \frac{4}{238} \cdot \frac{\ln 2}{4,47 \times 10^9 \text{ år}} \cdot 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ år} = 2,1 \times 10^{-11} \text{ kg}$$

3. a) Betrakta den semiempiriska formeln för atomkärnors bindningsenergier:

$$B(A, Z) = +a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 / A^{1/3} - a_a (A - 2Z)^2 / A + \delta / A^{1/2}$$

Ge i korta ordalag en motivering till de fyra första termerna.

b) Skillnaden i bindningsenergi mellan de två isobara kärnorna ^{23}Na och ^{23}Mg är 4,84 MeV. Utnyttja denna uppgift till att så noga du kan beräkna kärnans radie för $A=23$.

Lösning:

a) Se kursboken

b) Utgående från den semiempiriska massformeln ges skillnaden i bindningsenergi för ^{23}Na och ^{23}Mg av skillnaden i Coulombenergin, övriga termer lika. Om man approximerar kärnan med ett homogent laddat klot (laddning Q , radie R) blir Coulombenergin:

$$V_C = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}, \text{ d.v.s.}$$

$$4,84 \text{ MeV} = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(12e)^2}{R} - \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(11e)^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{\hbar c \alpha}{R} (12^2 - 11^2) \Rightarrow R = \frac{3 \cdot 197 \text{ MeV fm} \cdot 23}{5 \cdot 137 \cdot 4,84 \text{ MeV}} \approx 4,1 \text{ fm}$$

(kan jämföras med den approximativa formeln $R = 1,2 \text{ fm} \cdot A^{1/3} \approx 3,4 \text{ fm}$).

1) Totala spinnet hos proton + neutron är

$$\bar{S} = \bar{S}_p + \bar{S}_n \quad (\text{operatorer})$$

varav

$$\hat{S}^2 = (\bar{S}_p + \bar{S}_n)^2 = (\hat{S}_p^2 + \hat{S}_n^2 + 2\bar{S}_p \cdot \bar{S}_n)$$

varav

$$\bar{S}_p \cdot \bar{S}_n = \frac{1}{2} (\hat{S}^2 - \hat{S}_p^2 - \hat{S}_n^2)$$

$\hat{S}_p^2$ har egenvärdet $\hbar^2 \frac{1}{2} (\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4} \hbar^2$ (proton: spin $\frac{1}{2}$)

$\hat{S}_n^2$ " " " " (neutron: ")

Enligt addition av rörelsemängdsmoment kan
kvanttalet S för $\hat{S}^2$ ha värden mellan

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ och $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Således har $\hat{S}^2$ egenvärdena

$$\hbar^2 \cdot 0(0+1) = 0$$

och

$$\hbar^2 \cdot 1(1+1) = 2\hbar^2$$

Således har

$$H_{\text{spin}} = \frac{A}{\hbar^2} \bar{S}_p \cdot \bar{S}_n = \frac{A}{2\hbar^2} (\hat{S}^2 - \hat{S}_p^2 - \hat{S}_n^2)$$

egenvärdena

$$\frac{A}{2\hbar^2} (0 - \frac{3}{4}\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2) = -\frac{3}{4} A \quad (S=0)$$

och

$$\frac{A}{2\hbar^2} (2\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2) = \frac{1}{4} A \quad (S=1)$$

2) Hamiltonoperatorn är

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2 + z^2)$$

Ansätt

$$\Psi(x, y, z) = \Psi_x(x) \Psi_y(y) \Psi_z(z)$$

Schrödingerekvationen $H\Psi = E\Psi$ blir

$$\begin{aligned} &\Psi_y \Psi_z \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_x}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \Psi_x \right] + \\ &\Psi_x \Psi_z \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_y}{dy^2} + \frac{m\omega^2}{2} y^2 \Psi_y \right] + \\ &\Psi_x \Psi_y \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_z}{dz^2} + \frac{m\omega^2}{2} z^2 \Psi_z \right] = E \Psi_x(x) \Psi_y(y) \Psi_z(z) \end{aligned}$$

Härav ses (genom div. m. $\Psi_x \Psi_y \Psi_z$) att

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_x}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \Psi_x = E_x \Psi_x$$

samt motsv. ekv. i y och z , där

$$E_x + E_y + E_z = E$$

Lösningar är egen tillstånd $\Psi_n(x)$ till endimensionella harmoniska oscillatorn med egenenergi $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$,

$$\text{dvs } \Psi_x^{(n)}(x) = \Psi_{n_x}(x), \quad n_x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Psi_y^{(n)}(y) = \Psi_{n_y}(y), \quad n_y = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Psi_z^{(n)}(z) = \Psi_{n_z}(z), \quad n_z = 0, 1, 2, \dots$$

och den totala energin blir

$$E = E_x + E_y + E_z = (n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}) \hbar \omega$$

Grundtillståndet är

$$\Psi_0(x) \cdot \Psi_0(y) \Psi_0(z)$$

med energin $\frac{3}{2} \hbar \omega$. Första exciterade energinivån fås med

$$\left. \begin{array}{l} n_x = 1, \quad n_y = 0, \quad n_z = 0 \\ \text{eller} \quad n_x = 0, \quad n_y = 1, \quad n_z = 0 \\ \text{eller} \quad n_x = 0, \quad n_y = 0, \quad n_z = 1 \end{array} \right\} \quad 3 \text{ st} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array}$$

och får energin

$$E = \left(1 + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega = \frac{5}{2} \hbar \omega$$

Med uttryck för Ψ_n i Physics Handbook fås

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{I}}(x, y, z) &= \Psi_1(x) \Psi_0(y) \Psi_0(z) = \\ &= \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} 2\alpha \cdot x \exp(-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2) \cdot \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 y^2} \cdot \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 z^2} \\ &= \sqrt{2} \cdot \alpha \cdot \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2} \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 r^2} \end{aligned}$$

P.s.s. får

$$\Psi_{\text{II}}(x, y, z) = \sqrt{2} \cdot \alpha \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2} y e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 r^2}$$

$$\Psi_{\text{III}}(x, y, z) = \sqrt{2} \alpha \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2} z e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 r^2}$$

Eftersom Ψ_1 och Ψ_0 var för sig är normaliserade och därmed ortogonala, så blir Ψ_{I} , Ψ_{II} och Ψ_{III} normaliserade och ortogonala,

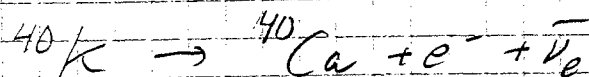
3a) Aktiviteten ges av

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \omega N \quad \text{där } \omega \text{ är sönderfallskonstanten}$$

och N antalet ^{40}K -kärnor i kroppen dvs.

$$A = \frac{\ln 2}{1,27 \cdot 10^9 \text{ år}} \cdot \frac{70 \text{ kg} \cdot 9,002 \cdot 0,000117 \cdot 6 \cdot 10^{26}}{40 \text{ kg}}$$
$$= 4,2 \cdot 10^3 \text{ Bq}$$

b) Antas 100% β^- -sönderfall dvs



Q -värdet är

$$Q_{\beta^-} = (M(^{40}\text{K}) - M(^{40}\text{Ca}) - m_e) c^2 =$$
$$= (19m_p + 21m_n - \frac{B(^{40}\text{K})}{c^2} - 20m_p - 20m_n + \frac{B(^{40}\text{Ca})}{c^2} - m_e) c^2$$
$$= B(^{40}\text{Ca}) - B(^{40}\text{K}) + (m_n - m_p - m_e) c^2 = (P.H.)$$
$$= 342,056 - 341,524 + 0,7823 \text{ MeV} = 1,31 \text{ MeV}$$

Elektronen bromsas upp i kroppen, dvs dess energi absorberas. Neutrinon absorberas ej. Antag att elektronen i snitt bär iväg $\frac{1}{2} \cdot Q_{\beta^-}$

Absorberad energi per kilsenhet blir då

$$\frac{1}{2} Q_{\beta^-} \cdot A = \frac{1}{2} \cdot 1,31 \text{ MeV} \cdot 4,2 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} = 4,4 \cdot 10^{-10} \text{ W}$$

4. En godtycklig vågfunktion $\Psi(\vec{r})$ kan skrivas som en linjärkombination av en fullständig uppsättning egenfunktioner:

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_k a_k \psi_k(\vec{r})$$

$$(t.ex) = \sum_{n, l, m_l, m_s} c_{n, l, m_l, m_s} R_{nl}(r) Y_l^{m_l}(\theta, \varphi) \chi_{m_s} \quad (1)$$

$$(eller t.ex) = \sum_{n, l, m_j} d_{n, l, m_j} R_{nl}(r) |j, l, m_j\rangle \quad (2)$$

där i (1) utveckling gjord i egen tillstånd till L^2, L_z, S^2, S_z och i (2) till L^2, S^2, J^2 och J_z .

Koefficienterna tolkas som sannolikhetsamplituder.

- a) Utveckla i egen tillstånd till L^2 och L_z som i (1). Redan gjort i uppgiften! Vi läser av:

$l=1$ dvs $L^2 = l(l+1)\hbar^2 = 2\hbar^2$ mäts med sannolikhet

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.00$$

övriga l med sannolikhet 0

$m_l = 0$ dvs $L_z = m_l \hbar = 0$ mäts med sannolikhet

$$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$m_l = +1$ dvs $L_z = +\hbar$ mäts med sannolikhet $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$

övriga L_z mäts med sannolikhet 0

b) Gör utveckling (2). Vi inser att $j=1/2$ och $j=3/2$ potentiellt möjliga ty $l=1$ och $s=1/2$, samt att $m_j = m_l + m_s = +1/2$ enda möjligheten. Skriv om $\Psi(r, \theta, \phi)$ på formen (2):

$$|3/2 \ 1 + 3/2\rangle = Y_1^{+1} \uparrow$$

$$|3/2 \ 1 + 1/2\rangle = N j_- |3/2 \ 1 + 3/2\rangle = N \{ L_- Y_1^{+1} \uparrow + Y_1^{+1} S_- \uparrow \} =$$

$$= (\text{p.h.}) = N \{ \sqrt{2} \hbar Y_1^0 \uparrow + \hbar Y_1^{+1} \downarrow \} = \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^0 \uparrow + \sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^{+1} \downarrow$$

$|1/2 \ 1 + 1/2\rangle$ ortogonal mot $|3/2 \ 1 + 1/2\rangle$ dvs

$$|1/2 \ 1 + 1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^0 \uparrow - \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^{+1} \downarrow$$

Detta ger: $Y_1^0 \uparrow = \frac{1}{\sqrt{3}} |1/2 \ 1 + 1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2 \ 1 + 1/2\rangle$

och $Y_1^{+1} \downarrow = -\sqrt{\frac{2}{3}} |1/2 \ 1 + 1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |3/2 \ 1 + 1/2\rangle$

insättes i $\Psi(r, \theta, \phi) \Rightarrow$

$$\Psi(r, \theta, \phi) = -\frac{1}{3} R_{21}(r) |1/2 \ 1 + 1/2\rangle + \frac{2\sqrt{2}}{3} R_{21}(r) |3/2 \ 1 + 1/2\rangle$$

Vi avläser

$j=1/2$ dvs $J^2 = \frac{3}{4} \hbar^2$ sannolikhet $(-\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$

$j=3/2$ dvs $J^2 = \frac{15}{4} \hbar^2$ - " - $(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2 = \frac{8}{9}$

Övriga J^2 - " - 0

$m_l = +1/2$ dvs $J_z = +\frac{\hbar}{2}$ - " - $\frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1,00$

Övriga J_z - " - 0

5)

a) För 1 partikel i denna potential tås (Phys. Handbook)

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad - \text{ " } -$$

Grundtillståndet blir därtör

$$\Psi_g(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) \varphi_1(x_2) = \frac{2}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} \cdot \sin \frac{\pi x_2}{a}$$

med energin

$$E = 2E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$$

$$b) E_g^{(1)} = \langle \Psi_g | V' | \Psi_g \rangle =$$

$$= \int_0^a \int_0^a \left(\frac{2}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} \cdot \sin \frac{\pi x_2}{a} \right)^2 (-\epsilon V_0 \delta(x_1 - x_2)) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_0^a \frac{4}{a^2} \sin^4 \left(\frac{\pi x_1}{a} \right) (-\epsilon V_0) dx_1 = -\frac{4\epsilon V_0}{a^2} \int_0^{\pi} \sin^4 y \frac{a}{\pi} dy$$

$$= -\frac{4\epsilon V_0}{\pi a} \int_0^{\pi} \sin^4 y dy = -\frac{4\epsilon V_0}{\pi a} \cdot \frac{3\pi}{8} = -\frac{3}{2} V_0 \cdot \frac{\epsilon}{a}$$

C) Om systemet är i näst lägsta energinivån, så måste vi ha en partikel i $n=1$ och en partikel i $n=2$. Den ostörda energin måste alltså vara

$$E_1 + E_2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} + \frac{2^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \underline{\underline{\frac{5\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}}}$$

Om totala spinnet är $2\hbar^2$, så har vi tydligen

$$2\hbar^2 = \hbar^2 S(S+1) \rightarrow S=1$$

dvs parallella spin. Detta innebär att spindelen av tillståndet måste vara symmetrisk, eftersom den är någon av "triplettens", tre möjligheter, dvs

$$\begin{cases} \uparrow_1 \uparrow_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [\uparrow_1 \downarrow_2 + \downarrow_1 \uparrow_2] \\ \downarrow_1 \downarrow_2 \end{cases}$$

Alltså måste rumsdelen vara antisymmetrisk, dvs ha formen

$$\Psi_{\text{exc}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) - \varphi_1(x_2)\varphi_2(x_1)]$$

Eftersom spintillstånden i "tripletten" är ortogonala (olika egenvärden till S_z) och S_z kommuterar med V' , kan icke-degenererad störningsteori användas. Vi får

$$E_{\text{exc}}^{(1)} = \langle \Psi_{\text{exc}} | V' | \Psi_{\text{exc}} \rangle =$$

$$= \int_0^a \int_0^a \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) - \varphi_1(x_2)\varphi_2(x_1)) \right|^2 (-\epsilon \cdot V_0 \delta(x_1 - x_2)) dx_1 dx_2$$

$$= \int_0^a \left(-\frac{\epsilon V_0}{2} \right) \underbrace{\left| \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1) - \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1) \right|^2}_{=0} dx_1 = 0$$

VSB