

FYSIKUM STOCKHOLMS UNIVERSITET

Tentamen i kvantfysik, delkurs II, 8p
Lördag 27 augusti 2005, kl. 9.00-15.00.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook och räknare.

Instruktioner: Lösningar skall presenteras på ett sådant sätt att logiken klart framgår och gjorda antaganden skall motiveras.

Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 4 poäng. För godkänt krävs minst 6p på vardera kvantteoridelen och subatomära delen av tentamen, samt totalt minst 16p. För väl godkänt krävs minst 10p på vardera kvantteoridelen och subatomära delen av tentamen, samt totalt minst 24p.

(Inga bonuspoäng kan tillgodoräknas på denna tentamen.)

Betygsgränserna är ungefärliga och kan justeras något beroende på provets svårighetsgrad.

Lycka till! *Sten, Per-Erik och Anders*

Teoretisk Kvantfysik

K-1) Betrakta väteatomen under antagandet att den enda växelverkan är Coulombattraktionen mellan protonen och elektronen och att relativistiska effekter försummas.

- a) Vilka kvanttal beror de stationära bundna tillstånden av och vilka värden antar dessa kvanttal?
- b) Redogör kortfattat för dessa kvanttals fysikaliska betydelse!
- c) Antag att atomen befinner sig i grundtillståndet och absorberar en foton. Bestäm den längsta våglängd denna foton kan ha!

K-2) Två partiklar rör sig i en dimension i potentialen $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Partiklarna saknar spinn och växelverkar inte med varandra.

Ledning: Lösningen till problemet för en partikel får utnyttjas utan att härledas.

- a) Antag att partiklarna är olika. Bestäm vågfunktionen för grundtillståndet och dess energi!
- b) Antag att partiklarna är identiska bosoner. Bestäm vågfunktionen för grundtillståndet och dess energi!
- c) Antag att partiklarna är identiska fermioner. Bestäm vågfunktionen för grundtillståndet och dess energi!

K-3) Variationsprincipen i kvantmekaniken.

- a) Formulera variationsprincipen och redogör kortfattat för vad den betyder och hur den kan användas!
 - b) Bevisa variationsprincipen!
- K-4) En partikel med massan m befinner sig instängd i en en-dimensionell 'låda' med längd L . I lådan verkar en kraft som attraherar partikeln mot lådans centrum. Kraften är proportionell mot avståndet från centrum med proportionalitetskonstant k . Bestäm skillnaden i energi mellan de två lägsta energinivåerna i lägsta ordningens störningsteori!

Subatomär Fysik

S-1) I ett bubbelkammarexperiment där protoner med hög energi kolliderade med protoner i det flytande vätet bildades bland annat en neutral partikel som efter en kort sträcka sönderföll till två elektriskt laddade partiklar vilka visade sig som spår på bubbelkammarbilden. Dessa partiklar kunde identifieras som K^- och π^+ . Vilken är den sönderfallande neutrala partikeln? (Du kan antaga att den neutrala moderpartikeln bara sönderföll till dessa två partiklar, och alltså inga ytterligare neutrala partiklar.)

Rita ett Feynmandiagram för sönderfallet.

Kan man med utgångspunkt från vad vi nu vet säga något om de andra partiklar som bildas i kollisionen?

S-2) Vilka kombinationer av kvarkar och antikvarkar bygger upp baryoner (t.ex. protoner) och mesoner (t.ex. π -mesoner). Förklara varför vi inte kan observera fria kvarkar och gluoner. Nämn minst en kombination av kvarkar och antikvarkar utöver de två ovan som skulle kunna existera i naturen enligt de urvalsregler vi känner till idag.

S-3)

I en konventionell kärnreaktor produceras den energi vi utnyttjar för elproduktion med hjälp av en kärnreaktion som benämns "inducerad fission": $n + {}^A_ZX \rightarrow {}^B_ZY + {}^C_ZZ + \nu n$, dvs fissionen av nukliden A_ZX åstadkoms genom infångning av (termiska) neutroner.

- Vilken nuklid (vilket grundämne och vilken isotop) A_ZX är det som utnyttjas?
- I tabell 12.1 ur läroboken (se nedan) anges den energi som frigörs i fissionen av den relevanta nukliden, uppdelad på sex olika bidrag. Ett av dessa bidrag kan vi inte utnyttja i energiproduktionen. Vilket och varför?
- Gör en egen beräkning, med hjälp av den semiempiriska massformeln ur Physics Handbook, av ett approximativt värde på den energi som frigörs vid den inducerade fissionen $n + {}^A_ZX \rightarrow {}^B_ZY + {}^C_ZZ + \nu n$. Antag för enkelhets skull att fissionen är symmetrisk (Y och Z lika) samt att antalet frigjorda neutroner, ν , är 2. Jämför med tabellen 12.1 och kommentera överensstämmelsen.
- I en reaktor byggs även tyngre ämnen upp, bl.a. en i flera sammanhang speciellt viktig isotop ${}^{239}\text{Pu}$. Vilka processer leder till produktion av isotopen ${}^{239}\text{Pu}$?

Table 12.1 | Distribution of Energy from the Fission of

Source of Energy	E (MeV)
fission fragment kinetic energy	167
prompt neutron kinetic energy	5
prompt γ -ray energy	6
delayed β -decay energy	8
delayed γ -ray energy	7
delayed antineutrino energy	12
total	205

S-4)

Kolisotopen ${}^{14}\text{C}$, som skapas i den övre atmosfären genom kärnreaktioner mellan neutroner och kväve-kärnor, har en halveringstid på 5730 år och ingår i den koldioxid som *levande* växter tar upp från atmosfären. Från ett prov av trä från en arkeologisk utgrävning registrerar man 2,1 sönderfall per minut av ${}^{14}\text{C}$. Från ett träprov av samma storlek från ett nyhugget träd registrerar man 5,3 sönderfall per minut.

- Beräkna åldern på det trä som återfanns i den arkeologiska utgrävningen.
- Hur stor massa ${}^{14}\text{C}$ finns i det arkeologiska provet?



Teoretisk kvantfysik

K-1a) De stationära bundna tillstånden beror av de tre kvanttalerna n, l, m som antar värdena

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$l = 0, 1, \dots, n-1$$

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

b) l och m är kvanttal för rörelsemängden:

$$\hat{L}^2 \text{ har egenvärdena } \hbar^2 l(l+1) \text{ och}$$

$$\hat{L}_z = \dots \hbar m$$

l ger alltså beloppet av L , medan m ger dess z -komponent.

n är det sk. huvudkvanttalet som uppkommer då den radiala ekvationen löses. Större n betyder större sannolikhet att finna elektronen längre från kärnan.

l och m ger vågfunktionens ömselberörande.

c) Längsta våglängd fås då energin är minst, dvs elektronen exciteras från $n=1$ till $n=2$

$$\Delta E = \frac{E_1}{4} - E_1 = -\frac{3}{4} E_1 \quad E_1 = -\frac{m}{2\pi^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 = -13,6 \text{ eV}$$

$$= -\frac{\alpha^2 m_e c^2}{2}$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\omega} = \frac{2\pi\hbar c}{\Delta E} = \frac{8\pi\hbar c \cdot 2}{3\alpha^2 m_e c^2} = \frac{16\pi \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 13,7^2 \text{ J}}{3 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ kg m}}$$

$$= 1,21 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Svar: Våglängden är $1,21 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

K-2) Två partiklar i $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

Lösning till Schrödingerekvationen (SE) för en partikel:

$$\psi_n(x), \quad n=0,1,2,\dots$$

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$$

a) Två olika, icke-växelverkande, partiklar

$$\psi_{nm}(x_1, x_2) = \psi_n(x_1) \psi_m(x_2) \text{ lös. t. SE}$$

$n=m=0$ ger lägst energi:

$$\psi_{00}(x_1, x_2) = \psi_0(x_1) \psi_0(x_2)$$

$$E_{00} = 2E_0 = \hbar \omega$$

b) Två identiska bosoner. Vågfunktionen skall vara symmetrisk, svaret blir detsamma som i a) (Partiklarna befinner sig i samma tillstånd.)

c) Två identiska fermioner. Vågfunktionen skall vara antisymmetrisk, lägst energi fås om

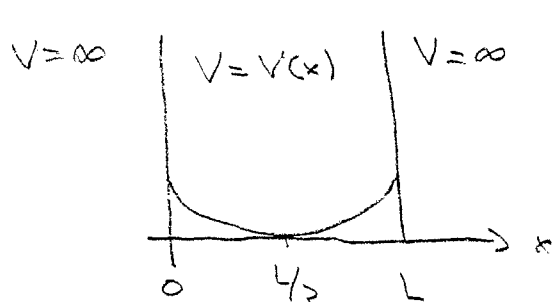
$$\psi_{01}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_0(x_1) \psi_1(x_2) - \psi_0(x_2) \psi_1(x_1))$$

$$E_{01} = E_0 + E_1 = 2\hbar \omega$$

(Dus fermionerna befinner sig i de två lägsta tillstånden ψ_0 och ψ_1 .)

K-3) Se Griffiths.

- K-4) Partikel i låda som attraheras mot centrum av kraft proportionell mot avståndet.



$$V(x) = \frac{k}{2} (x - L/2)^2$$

$$F = -\frac{dV}{dx} = -k(x - L/2) = k(L/2 - x)$$

Behandla $V(x)$ som en störning

Ostörda problemet: $V(x) = 0$ i lådan

Lösning av Schr. eqn ger

$$\psi_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad 0 \leq x \leq L \quad n = 1, 2, \dots$$

$$E_n^0 = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

(se Griffiths).

Bestäm korrekturen till E_1 och E_2 : lågsta ordningens störningsteori

$$E_n' = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

$$H' = \frac{k}{2} (x - L/2)^2 \quad 0 \leq x \leq L$$

$$= \frac{2}{L} \frac{k}{2} \int_0^L (x - L/2)^2 \underbrace{\sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\frac{1}{2}(1 - \cos\frac{2n\pi}{L}x)} dx$$

$$= \frac{k}{2L} \int_0^L \left\{ x^2 - Lx + \frac{L^2}{4} - x^2 \cos\frac{2n\pi}{L}x + Lx \cos\frac{2n\pi}{L}x - \frac{L^2}{4} \cos\frac{2n\pi}{L}x \right\} dx$$

$$= \frac{k}{2L} \left[\frac{x^3}{3} - L\frac{x^2}{2} + \frac{L^2}{4}x - \frac{L^3}{8n\pi} \sin\frac{2n\pi}{L}x \right]_0^L$$

$$+ \frac{k}{2} \int_0^L x \cos\frac{2n\pi}{L}x dx - \frac{k}{2L} \int_0^L x^2 \cos\frac{2n\pi}{L}x dx$$

$$\int x \cos tx \, dx, \quad \int x^2 \cos tx \, dx$$

$$f(t) = \int \sin tx \, dx = -\frac{1}{t} \cos tx$$

$$g(t) = \int \cos tx \, dx = \frac{1}{t} \sin tx$$

$$\frac{df}{dt} = \int x \cos tx \, dx = \frac{1}{t^2} \cos tx + \frac{x}{t} \sin tx$$

$$\frac{dg}{dt} = -\int x \sin tx \, dx = -\frac{1}{t^2} \sin tx + \frac{x}{t} \cos tx$$

$$\frac{d^2g}{dt^2} = -\int x^2 \cos tx \, dx = \frac{2}{t^3} \sin tx + \frac{x}{t^2} \cos tx - \frac{x}{t^2} \cos tx - \frac{x^2}{t} \sin tx$$

$$\int x^2 \cos tx \, dx = \left(\frac{2}{t^3} + \frac{x^2}{t} \right) \sin tx + 2 \frac{x}{t^2} \cos tx$$

$$\int_0^L x \cos \frac{2n\pi}{L} x \, dx = \left(\frac{L}{2n\pi} \right)^2 \cos \frac{2n\pi}{L} x + \frac{xL}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi}{L} x \Big|_0^L = 0$$

(OK, $x \cos \frac{2n\pi}{L} x$ odda map $x=L/2$)

$$\begin{aligned} \int_0^L x^2 \cos \frac{2n\pi}{L} x \, dx &= \left(\frac{L}{2n\pi} \right)^3 \left(-2 + x^2 \frac{2n\pi}{L} \right) \sin \frac{2n\pi}{L} x + 2 \left(\frac{L}{2n\pi} \right)^2 x \cos \frac{2n\pi}{L} x \Big|_0^L \\ &= 2 \left(\frac{L}{2n\pi} \right)^2 L \end{aligned}$$

$$E'_n = \frac{k}{2L} \left[\frac{L^3}{3} - \frac{L^3}{2} + \frac{L^3}{4} \right] - \frac{k}{2\pi} 2L \left(\frac{L}{2n\pi} \right)^2 = \frac{kL^3}{24} - \frac{kL^3}{(2n\pi)^2}$$

Svar: Skillnaden i energi är $E'_1 - E'_2 = -\frac{3kL^3}{16\pi^2}$

1.

a) Nukliden ^{235}U

b) Bidraget från antineutriner, ty sannolikheten att de växelverkar med materialet i reaktorn är försumbar.

$$c) E = [(totala massan före) - (totala massan efter)]c^2 = [m_N(^{235}\text{U}) + m_n - 2m_N(^{117}\text{Pd}) - 2m_n]c^2$$

I den Weizäckers semiempiriska formel (P.H.) kommer bidragen från termerna M_0 och M_1 ta ut sig vid subtraktionen och kvar har vi:

$$E = [a_2 235^{2/3} - 2a_2 117^{2/3} + a_3 92^2 / 235^{1/3} - 2a_3 46^2 / 117^{1/3} + a_4 (235 - 2 \times 92)^2 / 235 - 2a_4 (117 - 2 \times 46)^2 / 117]c^2 = [-0,1866u + 0,3861u + 0,0098u]931,5\text{MeV}/u \approx 195\text{MeV}$$

Detta värde ska jämföras med summan av de tre första bidragen i tabellen, dvs med 178 MeV (De tre sista bidragen i tabellen härrör från sönderfall, i första hand beta-sönderfall, av de två bildade fragmentens grundtillstånd). Överensstämmer kvalitativt väl, men vi kan inte förvänta sig ngn exakt överensstämmelse då den semiempiriska massformeln inte tar hänsyn till effekter som skaleffekter samt då fissionen inte är symmetrisk utan favoriserar fragment med masstal kring 95 och 140.

d) Isotopen ^{239}Pu bildas genom neutroninfångning i (den i bränslet dominerande uranisotopen) ^{238}U och efterföljande betasönderfall, dvs $n + ^{238}\text{U} \rightarrow ^{239}\text{U}$ följt av $^{239}\text{U} \rightarrow ^{239}\text{Np} + e^- + \bar{\nu}$ och $^{239}\text{Np} \rightarrow ^{239}\text{Pu} + e^- + \bar{\nu}$.

2.

a) Antal sönderfall per tidsenhet (aktiviteten) vid tiden t ges av $A(t) = A(0)e^{-\lambda t}$. Aktiviteten hos det "nya" provet förväntas vara $A(0)$ (under förutsättning att proven innehåller lika mycket kol samt att halten av kol-14 i atmosfären varit konstant). Detta ger att kvoten mellan aktiviteterna är: $A_{\text{gammalt}} / A_{\text{nytt}} = A(0)e^{-\lambda t} / A(0) = e^{-\lambda t}$ dvs

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln(A_{\text{gammalt}} / A_{\text{nytt}}) = -(5730\text{år} / \ln 2) \times \ln(2,1/5,3) = 7650\text{år}$$

$$b) A(t) = \left| \frac{dN(t)}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt} N(0)e^{-\lambda t} \right| = \left| -\lambda N(0)e^{-\lambda t} \right| = \lambda N(t), \text{ där } N(t) \text{ är antalet radioaktiva}$$

kärnor, dvs antalet kol-14-kärnor i det gamla provet är $2,1 \text{ min}^{-1} \times (5730\text{år} / \ln 2) = 9,1 \times 10^9$ st, motsvarande en massa $2,1 \times 10^{-16} \text{ kg}$.

1. I en konventionell kärnreaktor produceras den energi vi utnyttjar för elproduktion med hjälp av en kärnreaktion som benämns "inducerad fission": $n + {}^A_ZX \rightarrow {}^B_ZY + {}^C_ZZ + \nu n$, dvs fissionen av nukliden A_ZX åstadkoms genom infångning av (termiska) neutroner.
 - a) Vilken nuklid (vilket grundämne och vilken isotop) A_ZX är det som utnyttjas?
 - b) I tabell 12.1 ur läroboken (se nedan) anges den energi som frigörs i fissionen av den relevanta nukliden, uppdelad på sex olika bidrag. Ett av dessa bidrag kan vi inte utnyttja i energiproduktionen. Vilket och varför?
 - c) Gör en egen beräkning, med hjälp av den semiempiriska massformeln ur Physics Handbook, av ett approximativt värde på den energi som frigörs vid den inducerade fissionen $n + {}^A_ZX \rightarrow {}^B_ZY + {}^C_ZZ + \nu n$. Antag för enkelhets skull att fissionen är symmetrisk (Y och Z lika) samt att antalet frigjorda neutroner, ν , är 2. Jämför med tabellen 12.1 och kommentera överensstämmelsen.
 - d) I en reaktor byggs även tyngre ämnen upp, bl.a. en i flera sammanhang speciellt viktig isotop ${}^{239}\text{Pu}$. Vilka processer leder till produktion av isotopen ${}^{239}\text{Pu}$?

Table 12.1 | Distribution of Energy from the Fission of

Source of Energy	E (MeV)
fission fragment kinetic energy	167
prompt neutron kinetic energy	5
prompt γ -ray energy	6
delayed β -decay energy	8
delayed γ -ray energy	7
delayed antineutrino energy	12
total	205

2. Kolisotopen ${}^{14}\text{C}$, som skapas i den övre atmosfären genom kärnreaktioner mellan neutroner och kväve-kärnor, har en halveringstid på 5730 år och ingår i den koldioxid som *levande* växter tar upp från atmosfären. Från ett prov av trä från en arkeologisk utgrävning registrerar man 2,1 sönderfall per minut av ${}^{14}\text{C}$. Från ett träprov av samma storlek från ett nyhugget träd registrerar man 5,3 sönderfall per minut.
 - a) Beräkna åldern på det trä som återfanns i den arkeologiska utgrävningen.
 - b) Hur stor massa ${}^{14}\text{C}$ finns i det arkeologiska provet?

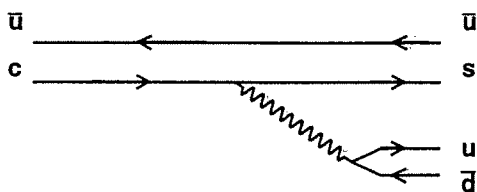
Subatomär Fysik

S-3 I ett bubbelkammarexperiment där protoner med hög energi kolliderade med protoner i det flytande vätet bildades bland annat en neutral partikel som efter en kort sträcka sönderföll till två elektriskt laddade partiklar vilka visade sig som spår på bubbelkambilden. Dessa partiklar kunde identifieras som K^- och π^+ . Vilken är den sönderfallande neutrala partikeln? (Du kan antaga att den neutrala moderpartikeln bara sönderföll till dessa två partiklar, och alltså inga ytterligare neutrala partiklar.)

Rita ett Feynmandiagram för sönderfallet.

Kan man med utgångspunkt från vad vi nu vet säga något om de andra partiklar som bildas i kollisionen?

Förslag till lösning: Eftersom moderpartikeln hinner färdas en sträcka i bubbelkammaren så är sönderfallet svagt. Sär-kvarken måste vara en av sönderfallsprodukterna och det enda sönderfallet som ger korrekt kvarksammansättning är $D^0 \rightarrow K^- \pi^+$ (Det svaga sönderfallet av Φ med kvarkinnehåll $s\bar{s}$ till samma sluttillstånd förekommer ej då det konkurreras ut av det starka sönderfallet av Φ). Feynmandiagrammet för detta sönderfall ser ut så här:



Eftersom baryontalet bevaras i alla växelverkningsar vet vi att det bland de övriga partiklarna finns två baryoner, protoner och/eller neutroner. (Eventuellt kan också Λ -baryoner bildas, men dessa sönderfaller snabbt till proton eller neutron plus andra partiklar.

Eftersom den ursprungliga reaktionen är via stark växelverkan så måste den charm-kvark som fanns i D^0 -mesonen ha bildats i par med en anti-charm-kvark. I händelsen finns alltså sönderfallsprodukterna från denna.

S-4 Vilka kombinationer av kvarkar och antikvarkar bygger upp baryoner (t.ex. protoner) och mesoner (t.ex. π -mesoner). Förklara varför vi inte kan observera fria kvarkar och gluoner. Nämn minst en kombination av kvarkar och antikvarkar utöver de två ovan som skulle kunna existera i naturen enligt de urvalsregler vi känner till idag.

Förslag till lösning: Baryoner byggs upps av tre kvarkar, mesoner av en kvark och en antikvark. Detta kan vi förklara genom att den starka växelverkan känner av "färgladdning" som kommer i tre laddningar, plus anti-laddningar (märk att elektrisk laddning bara är envärd i detta språkbruk plus och minus är varandras antiladdningar). Den starka potentialen har en term proportionell med r . Detta medför att kraften mellan två färgladdningar är konstant, oberoende av avstånd. Det arbete som åtgår att sära på två färgladdningar växer därför linjärt med avståndet och det åtgår en oändlig energi för att skilja två färgladdningar åt. Detta innebär att alla "nakna" färgladdningar attraherar andra färgladdningar och bildar färgneutrala - vita - system. Kombinationerna ovan är exempel på sådana system, för baryoner kombineras de tre olika färgladdningarna till ett "vitt" system, för mesoner kombineras en färg med en antifärg för att åstadkomma ett "vitt" system.

Allmänt kan vi därför bygga färgneutrala system av kombinationer av kvarkar och antikvarkar av typen $N(qqq) + M(q\bar{q})$. Baryoner har $N=1$ och $M=0$, mesoner har $N=0$ och $M=1$. Bland de övriga möjliga kombinationerna har nyligen $N=1$, $M=1$ kombinationen $(qqqq\bar{q})$ - "pentakvarkar" - och $N=0$, $M=2$ kombinationen $(q\bar{q}q\bar{q})$ - "kvarkmolekyler" ådragit sig stort intresse då det funnits experimentella resultat som skulle kunna tolkas som att man observerat dessa tillstånd. Dessa resultat är svårtolkade och just nu lutar nog de flesta åt att man inte har observerat dessa tillstånd.