

FYSIKUM STOCKHOLMS UNIVERSITET

Tentamen i kvantfysik, delkurs II, 8p Tisdag 4 januari 2005, kl. 9.00-15.00.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook och räknare.

Instruktioner: Lösningar skall presenteras på ett sådant sätt att logiken klart framgår och gjorda antaganden skall motiveras.

Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 4 poäng. För godkänt krävs, bonuspoäng oräknat, minst 6p på vardera kvantteoridelen och subatomära delen av tentamen, samt totalt, inklusive eventuella bonuspoäng, minst 16p. För väl godkänt krävs, bonuspoäng oräknat, minst 10p på vardera kvantteoridelen och subatomära delen av tentamen, samt totalt, inklusive eventuella bonuspoäng, minst 24p. Eventuella bonuspoäng (4 st) från inlämningsuppgifterna räknas in i resultatet på ordinarie tentamen och första omtentamen.

Betygsgränserna är ungefärliga och kan justeras något beroende på provets svårighetsgrad.

Lycka till! *Sten, Per-Erik och Anders*

Teoretisk Kvantfysik

K-1) En väteatom befinner sig i tillståndet med kvanttal $n = 3, \ell = 0$.

- Ange vågfunktionen för atomen!
- Atomen emitterar en foton, bestäm de möjliga värdena på det utsända ljusets frekvens!
- Visa att vågfunktionen i a) är en lösning till den tidsberoende Schrödingerekvationen och bestäm motsvarande energieigenvärde!

K-2) Två identiska partiklar rör sig i en dimension i potentialen $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Partiklarna saknar spinn och växelverkar inte med varandra.
Ledning: Lösningen till problemet för en partikel får utnyttjas utan att härledas.

- Antag att partiklarna är bosoner. Bestäm vågfunktionen för grundtillståndet och dess energi!
- Antag att partiklarna är fermioner. Bestäm vågfunktionen för grundtillståndet och dess energi!

K-3) Betrakta en jon som består av en atomkärna med spinnkvanttal $s = 1$ och en elektron med spinnkvanttal $s = 1/2$.

- a) Vilka är de möjliga spinnkvanttalerna s^{tot} för jonen?
- b) Uttryck tillstånden som har bestämda värden på s^{tot} och s_z^{tot} i tillstånden där s och s_z har bestämda värden för kärnan och elektronen!
- Ledning: $\hat{S}_{\pm}|s, m\rangle = \hbar\sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)}|s, m \pm 1\rangle$.

K-4) En partikel med massan m rör sig i en dimension i potentialen $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + ax^3 + bx^4$. Bestäm energieigenvärdena till första ordningen i a och b (samt exakt i ω).

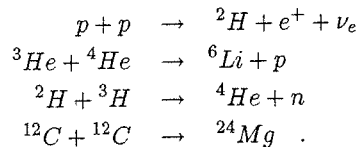
Ledning: $\hat{a}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}[\mp i\hat{p} + m\omega x]$. Lösningarna till problemet för $a = b = 0$ får användas utan härledning.

Subatomär Fysik

S-1) Betrakta en stabil atomkärna som har Z protoner och N neutroner.

- a) Vad är masstalet A för denna atomkärna?
- b) Ett approximativt värde (bättre än 1 % noggrannhet) på massan är $m' = Zm_p + Nm_n$, där m_p och m_n är protonens, respektive neutronens, massa. Antag att m är kärnans verkliga massa. Vad gäller, $m > m'$ eller $m < m'$? Motivera i korta ordalag ditt svar!
- c) För tyngre kärnor (säg för $A > 50$) gäller att $N > Z$. Motivera varför!

S-2) Betrakta följande fyra kärnreaktioner



- a) Beräkna Q -värdet (dvs ökningen av den kinetiska energin) för de fyra reaktionerna.
- b) Vilken av reaktionerna har stor betydelse för energiproduktionen i solen? Motivera varför!
- c) Vilken av reaktionerna är tänkt att användas i första generationens fusionsreaktorer? Vilka nackdelar har övriga reaktioner?

S-3) Hitills har vi med säkerhet bara observerat hadroner som är uppbyggda antingen av tre kvarkar (tre antikvarkar för deras antipartiklar) eller av en kvark och en antikvark. Hur förklaras detta inom teorin för den starka växelverkan?

S-4)

W-bosonen upptäcktes i experiment vid CERN i början på 80-talet. Reella W-bosoner producerades i proton-antiproton och detekterades genom sönderfall till antingen $e\bar{\nu}_e$ eller $\mu\bar{\nu}_\mu$ (eller till respektive antipartiklar).

Rita Feynmandiagram för en av de möjliga produktions- och sönderfallsprocesserna. Vilka ytterligare sönderfallsmöjligheter än de som listas ovan har W-bosonen? Förklara varför upptäckten gjordes i just de sönderfallskanaler som listas ovan?



Teoretisk kvantfysik

K-1/a Enligt Physics Handbook eller
gräffitur är vågfunktioner

$$\psi_{300} = R_{30} Y_0^0$$

där

$$R_{30}(r) = \frac{2}{\sqrt{27}} a^{-3/2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r}{a} + \frac{2}{27} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) e^{-r/3a}$$

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

b) Atomens elektronstånd måste ha lägre
energi, dvs $n=1$ eller $n=2$

Atomens energi $E_n = \frac{E_1}{n^2}$, $E_1 = -13,6 \text{ eV}$

Fotonens energi ΔE

$$n=1: \Delta E = E_3 - E_1 = \left(\frac{1}{9} - 1\right) E_1$$

$$n=2: \Delta E = E_3 - E_2 = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right) E_1$$

Frekvens $\nu = \Delta E / h$

$$n=1: \nu = -\frac{8}{9} \frac{E_1}{h} = \frac{8 \cdot 13,6 \text{ J}}{9 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 6,24 \cdot 10^{18}} = 2,9 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

$$n=2: \nu = -\frac{5}{36} \frac{E_1}{h} = \frac{5}{36} \cdot \frac{9}{8} \cdot 2,92 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} = 4,6 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

c) Visas genom initialvärden i Schrödingers
ekvationer, se gräffitur.

K-2 | Två identiska partiklar: $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$.

Lösning till Schrödingerekvationen (SE) för en partikel:

$$\psi_n(x) \quad n=0,1,2,\dots$$

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$$

Eftersom partiklarna ej växelverkar med varandra så är $\psi_n(x_1)\psi_n(x_2)$ en lösning till SE med energin $E_n + E_n$ för två (olika) partiklar.

(utan spin)

a) Två identiska bosoner. Vågfunktionen skall vara symmetrisk, lägst energi (dvs. grundtillståndet) får en

$$\psi_{GS}(x_1, x_2) = \psi_0(x_1) \psi_0(x_2)$$

$$E_{GS} = 2E_0 = \hbar \omega$$

Dus bosonerna befinner sig i samma tillstånd?

a) Två identiska fermioner (utan spin). Vågfunktionen skall vara antisymmetrisk, lägst energi får en

$$\psi_{GS}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_0(x_1) \psi_1(x_2) - \psi_0(x_2) \psi_1(x_1))$$

$$E_{GS} = E_0 + E_1 = 2\hbar\omega$$

Dus fermionerna befinner sig i de två lägsta tillstånden ψ_0 och ψ_1 .

K-2 En jon består av en kärna med $s=1$ och en elektron med $s=1/2$

a) Addition av rörelsemängdsmoment ger de möjliga värdena på s_{tot} , s_z tot för jonen:

$$s_{\text{tot}} = |s_1 - s_2|, \dots, s_1 + s_2$$

$$s_{\text{tot}} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

$$s_z^{\text{tot}} = -s_2^{\text{tot}}, -s_2^{\text{tot}} + 1, \dots, s_2^{\text{tot}}$$

$$s_{\text{tot}} = \frac{1}{2} : s_z^{\text{tot}} = \pm \frac{1}{2}$$

$$s_{\text{tot}} = \frac{3}{2} : s_z^{\text{tot}} = \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \\ + 4 \end{array} \right\}$$

6 tillstånd

$$\left. \begin{array}{ll} s=1 & 3 \text{ tillstånd} \\ s_z = \frac{1}{2} & 2 \text{ "} \end{array} \right\} 3 \cdot 2 = 6 \text{ tillstånd}$$

(skall vara lika)

b) Ide: Utgå från tillståndet med högst s_z^{tot} och använd stegoperator s_-

$$s = \frac{1}{2} : s_- | \frac{1}{2} \rangle = \hbar | -\frac{1}{2} \rangle$$

$$(s_- | -\frac{1}{2} \rangle = 0)$$

$$s = 1 : s_- | 1 \rangle = \hbar \sqrt{2} | 0 \rangle$$

$$s_- | 0 \rangle = \hbar \sqrt{2} | -1 \rangle$$

$$(s_- | -1 \rangle = 0)$$

Vi sätter $\hbar=1$ för att slippa onödiga faktorer
vidan.

K-36 forts

låt $|mm\rangle$ beteckna tillståndet där

kärnan har $S_z^k = m\hbar$ och elektronen $S_z^e = m\hbar$

$S_- = S_-^k + S_-^e$ där S_-^k verkar på kärnans spin
 S_-^e " elektronen "

$$|mm\rangle \quad m = 0, \pm 1; \quad m = \pm \frac{1}{2}$$

$$S_z^{\text{tot}} = \frac{3}{2}\hbar$$

$$S_z^{\text{tot}} = \frac{3}{2}\hbar$$

$$|1, \frac{1}{2}\rangle$$

$$S_z^{\text{tot}} = \frac{1}{2}\hbar$$

$$S_- |1, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2} |0, \frac{1}{2}\rangle + |1, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$S_z^{\text{tot}} = -\frac{1}{2}\hbar$$

$$S_-^2 |1, \frac{1}{2}\rangle = 2 | -1, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2} |0, -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2} |0, -\frac{1}{2}\rangle \\ = 2 | -1, \frac{1}{2}\rangle + 2\sqrt{2} |0, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$S_z^{\text{tot}} = -\frac{3}{2}\hbar$$

$$| -1, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$(kontroll: S_-^3 |1, \frac{1}{2}\rangle \propto | -1, -\frac{1}{2}\rangle)$$

Normering ger $S_z^{\text{tot}} = \frac{3}{2}\hbar$ tillståndet

$$S_z^{\text{tot}} = \frac{3}{2}\hbar$$

$$|1, \frac{1}{2}\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} |0, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |1, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} | -1, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |0, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$-\frac{3}{2}$$

$$| -1, -\frac{1}{2}\rangle$$

Kontroll för 2

- $S^{tot} = \frac{1}{2}$ tillståndet får ges av att välja
 $S_2^{tot} = \pm \frac{1}{2}$ tillstånd som är ortogonala
mot dem i $S^{tot} = 3/2$:

$$\underline{S_1^{tot} = \frac{1}{2}}$$

$$S_2^{tot} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} |0, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} |0, -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |-1, \frac{1}{2}\rangle$$

Kontroll: $S_- \left(\frac{1}{\sqrt{3}} |0, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1, -\frac{1}{2}\rangle \right)$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} |-1, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |0, -\frac{1}{2}\rangle - \frac{2}{\sqrt{3}} |0, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} |0, -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |-1, \frac{1}{2}\rangle \quad \underline{\underline{OK}}$$

11-11

$$\hat{H} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}}_{\hat{H}^0} + \underbrace{\frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + a x^3 + b x^4}_{\hat{H}^1}$$

$\hat{H}^0$ harmonisk oscillator i en dimension:

$$\hat{a}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (\mp i \hat{p} + m \omega x), \quad [\hat{a}_-, \hat{a}_+] = 1$$

$$\psi_n = c_n \hat{a}_+^n \psi_0, \quad \hat{a}_- \psi_0 = 0$$

$$\hat{H}^0 \psi_n = E_n \psi_n, \quad E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Normering bestämmer c_n : $c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$ (se nedan)

Här små a och b kan $\hat{H}^1$ inkluderas i den stör-
ringsteori. För att beräkna $\langle x^3 \rangle$, $\langle x^4 \rangle$
beräkna vi först $\langle \hat{a}_-^k \hat{a}_+^n \rangle$.

$$\langle \psi_n | \hat{a}_-^k \hat{a}_+^n | \psi_n \rangle = 0 \quad \text{om } k \neq n$$

t.ex. $\hat{a}_- | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | \hat{a}_+$, använd $[\hat{a}_-, \hat{a}_+] = 1$ för
att flytta $\hat{a}_-$ till höger (och $\hat{a}_+$ till vänster).
Ett resultat ställt från 0 får enbart om
alla $\hat{a}_+$ tar ut alla $\hat{a}_-$, dvs om $k = n$

$$\langle \psi_n | \hat{a}_-^k \hat{a}_+^k | \psi_n \rangle = |c_n|^2 \langle \psi_0 | \hat{a}_-^{k-n} \hat{a}_+^{k-n} | \psi_0 \rangle$$

$$= |c_n|^2 (k+n)! = \frac{(k+n)!}{n!} \quad (*)$$

Detta inser genom att flytta en $\hat{a}_+$ åt vänster:

K-4 forts

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_-^n \hat{a}_+ &= \hat{a}_-^{n-1} \hat{a}_- \hat{a}_+ \\
 &= \hat{a}_-^{n-1} (\hat{a}_+ \hat{a}_- + 1) = \hat{a}_-^{n-1} \hat{a}_+ \hat{a}_- + \hat{a}_-^{n-1} \\
 &= \hat{a}_-^{n-2} (\hat{a}_+ \hat{a}_- + 1) \hat{a}_- + \hat{a}_-^{n-1} = \hat{a}_-^{n-2} \hat{a}_+ \hat{a}_-^2 + 2\hat{a}_-^{n-1} \\
 &= \dots \\
 &= \hat{a}_+ \hat{a}_-^n + n \hat{a}_-^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 4_0 | \hat{a}_-^n \hat{a}_+^n | 4_0 \rangle &= \langle 4_0 | \cancel{\hat{a}_+ \hat{a}_-^n} \hat{a}_-^{n-1} + n \hat{a}_-^{n-1} \hat{a}_+^{n-1} | 4_0 \rangle \\
 &= n \langle 4_0 | \hat{a}_-^{n-1} \hat{a}_+^{n-1} | 4_0 \rangle
 \end{aligned}$$

Genom att iterera denna formel får

$$\langle 4_0 | \hat{a}_-^n \hat{a}_+^n | 4_0 \rangle = n! \langle 4_0 | 4_0 \rangle = n!$$

($|4_0\rangle$ antas
normerad)

• Detta är det sökta resultatet. Det visar också
att $|C_n|^2 = \frac{1}{n!}$

• Vi kan nu beräkna $\langle x^3 \rangle$ och $\langle x^4 \rangle$:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}_+ + \hat{a}_-) \equiv \beta (\hat{a}_+ + \hat{a}_-)$$

$$\langle x^3 \rangle = \langle 4_n | x^3 | 4_n \rangle = \beta^3 \langle 4_n | (\hat{a}_+ + \hat{a}_-)^3 | 4_n \rangle = 0$$

ty antalet $\hat{a}_+ \neq$ antalet $\hat{a}_-$.

K-4 forts 2)

$$\langle x^4 \rangle = \langle 2u | x^4 | 2u \rangle = \beta^4 \langle 2u | (a_+ - a_-)^4 | 2u \rangle$$

$$(a_+ - a_-)^4 = a_+^2 a_-^2 + a_+ a_- a_+ a_- + a_+ a_- a_- a_+ + a_- a_+^2 a_- \\ + a_- a_+ a_- a_+ + a_-^2 a_+^2 + \dots$$

antal $a_+ \neq$ antal a_-
ger $\langle \rangle = 0$

Skriv om termerna så att de a_- står till vänster och använd (*) för att beräkna $\langle x^3 \rangle$.

Man finner

$$a_+^2 a_-^2 + a_+ a_- a_+ a_- + a_+ a_- a_- a_+ + a_- a_+^2 a_- + a_- a_+ a_- a_+ + a_-^2 a_+^2 \\ = 6(a_-^2 a_+^2 - 2a_- a_+ + \frac{1}{2})$$

$$\langle x^4 \rangle = 6\beta^4 \left\{ \frac{(u+2)!}{u!} - 2 \frac{(u+1)!}{u!} + \frac{1}{2} \right\} \\ = 6\beta^4 (u^2 + u + \frac{1}{2})$$

Energiutvärdering i bo- och anslutnings störningsteori blir alltså:

$$\underline{E_u = (u + \frac{1}{2})\hbar\omega + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^2 \frac{3}{2} (u^2 + u + \frac{1}{2}) + O(\hbar^2, a^2)}$$

S-1

a) $A=Z+N$, dvs A är antalet nukleoner

1b) $m < m'$. Kärnan är ett bundet system, dvs dess totala energi mc^2 mindre än energin för dess beståndsdelar i vila ($=m'c^2$). Bindningen beror på den starka växelverkan mellan nukleonerna som är tillräckligt attraktiv för att systemet ska ha åtminstone ett bundet tillstånd, med ett egenvärde till hamiltonoperatoren $H=T+V$ som är negativt. Dvs systemets totala energi är $mc^2 = \langle T \rangle + \langle V \rangle + m'c^2$.

1c) Coulombväxelverkan (repulsiv) mellan protonerna ger ett positivt bidrag till $\langle V \rangle$, bindningsenergin ($-\langle T \rangle - \langle V \rangle$) för A nukleoner kan maximeras för ett visst överskott av neutroner.

S-2

a) $Q = (\sum \text{massor före} - \sum \text{massor efter})c^2$ (uttrycks med fördel i bindningsenergier)

$$\text{reaktion 1: } Q = (2m_p - m_d - m_e)c^2 = m_p c^2 - m_n c^2 + B(d) - m_e c^2$$

$$= (\text{P.H. 6.1}) = -1,29331 \text{ MeV} + 2,2245 \text{ MeV} - 0,511 \text{ MeV} = 0,42 \text{ MeV}$$

$$\text{reaktion 2: } Q = B(^6\text{Li}) + B(p) - B(^3\text{He}) - B(^4\text{He}) = -4,02 \text{ MeV}$$

$$\text{reaktion 3: } Q = B(^4\text{He}) + B(n) - B(d) - B(t) = 17,59 \text{ MeV}$$

$$\text{reaktion 4: } Q = B(^{24}\text{Mg}) - 2B(^{12}\text{C}) = 13,93 \text{ MeV}$$

2b) Det dominerade grundämnet i solen är väte: reaktion 1.

2c) Reaktion 3. Reaktion 1 och 4 har för små tvärsnitt för att vara intressanta. Reaktion 1 har extremt litet tvärsnitt pga att det är den svaga växelverkan som åstadkommer reaktionen.

Reaktion 4 har ett litet tvärsnitt vid rimliga temperaturer pga av Coulombbarriären. Reaktion 2 har ett negativt Q -värde, dvs ingen energi utvinns..

- S-3 Hitills har vi med säkerhet bara observerat hadroner som är uppbyggda antingen av tre kvarkar (tre antikvarkar för deras antipartiklar) eller av en kvark och en antikvark. Hur förklaras detta inom teorin för den starka växelverkan?

Förslag till lösning: I Standardmodellen beskrivs stark växelverkan som en växelverkan mellan färgladdade objekt. Denna färgladdning kan anta tre olika värden som vi ibland kallar "röd", "blå" och "grön". Dessutom förekommer "antiladdning" (jämför vi med elektrisk laddning kan vi på liknande sätt beskriva den som en-värd, med positiv laddning som "laddning" och negativ laddning som "antiladdning"). Kvarkar har färg-laddning, anti-kvarkar anti-färg medan gluoner har färg och anti-färg.

I analogi med att den mesta materian omkring oss är elektriskt neutral, trots att den byggs upp av elektriskt laddade elektroner och protoner så bildas hadroner av sammansättningar av kvarkar som är färgneutrala - "vita". Det finns två sätt att åstadkomma sådana kombinationer: antingen genom tre färgladdningar - en av varje typ, eller genom att kombinera en färgladdning och motsvarande anti-färg-laddning.

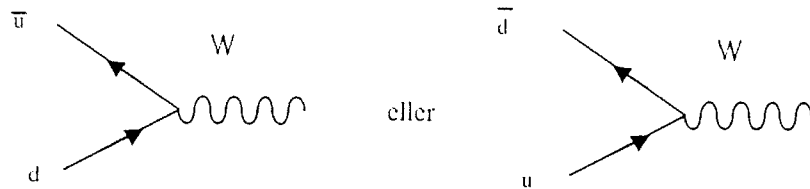
Detta förklarar varför vi endast har observerat hadroner som är uppbyggda antingen av tre kvarkar (eller antikvarkar, en kombination av de tre anti-färgerna är också "vit") eller av en kvark och en antikvark.

- S-4 W-bosonen upptäcktes i experiment vid CERN i början på -80 talet. Reella W-bosoner producerades i proton-antiproton och detekterades genom sönderfall till antingen $e\bar{\nu}_e$ eller $\mu\bar{\nu}_\mu$ (eller till respektive antipartiklar).

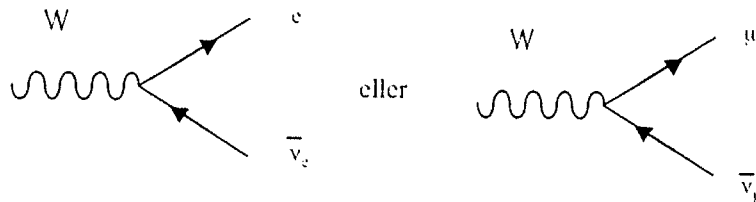
Rita Feynmandiagram för en av de möjliga produktions och sönderfallsprocesserna. Vilka ytterligare sönderfallsmöjligheter än de som listas ovan har W-bosonen? Förklara varför upptäckten gjordes i just de sönderfallskanaler som listas ovan?

Förslag till lösning:

Produktion:



Sönderfall:



samt sönderfall till respektive antipartiklar

Övriga möjliga sönderfall är dels till tau-lepton och den associerade antineutrinon, dels till kvark-antikvark par som hadroniserar till hadroner. Sönderfall till tau kunde inte detekteras i experimenten eftersom tau i sin tur sönderfaller till antingen elektron plus två neutrinos, myon plus två neutrinos eller till hadroner plus en neutrino.

Sönderfall till kvark-antikvarkpar kunde inte heller detekteras, eftersom det resulterar i hadronkvastar ("jets"). En sådan signatur går inte att entydigt identifiera som kommande från sönderfall av W-bosoner eftersom det i proton-antiprotonkollisioner produceras enorma mängder hadronkvastar genom den starka växelverkan. Eftersom den starka växelverkan är så mycket starkare än den svaga så är sannolikheten att producera hadronkvastar genom produktion av W-bosoner mycket mindre än sannolikheten att producera hadronkvastar via den starka växelverkan. Par av hadronkvastar producerade genom W-sönderfall druknar därför bland alla liknande par som produceras genom den starka växelverkan.

