

FYSIKUM

STOCKHOLMS UNIVERSITET

Tentamensskrivning i kvantfysik, delkurs II, 8 p

Lördagen den 21 augusti 2004 kl. 9 - 15

Hjälpmedel: Physics Handbook och räknare.

Lösningarna bör vara så pass utförliga och tydliga att de tillåter en bedömning. Observera att en klar och tydlig redogörelse kan ge poäng även om uppgiften inte är helt löst! Observera vidare att du fritt kan använda all tänkbar information från handboken, om inte annat sägs. Observera slutligen att problemen inte nödvändigtvis är ordnade efter växande svårighetsgrad – läs igenom dem först. Lycka till!

D.L.

✗1. Stegoperatorerna L_+ och L_- för rörelsemängdsmomentet fungerar som bekant så här:

$$L_+ Y_{lm} = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} Y_{l,m+1}$$

$$L_- Y_{lm} = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} Y_{l,m-1}$$

där $Y_{lm} \equiv |lm\rangle$ är egentillstånden till rörelsemängdsmomentoperatorerna $\mathbf{L}^2$ och L_z .

Med hjälp av bl.a. detta, konstruera matrisrepresentationen av rörelsemängdsmomentoperatorerna L_x , L_y och L_z , i den bas som utgörs av egentillstånden till L_z , för det fall att $l = 1$.

(Ledning: matrisrepresentationen av L_k , där $k = x, y$ eller z , uppställs (för $l = 1$) konventionellt som

$$\begin{pmatrix} \langle 1|L_k|1\rangle & \langle 1|L_k|0\rangle & \langle 1|L_k|-1\rangle \\ \langle 0|L_k|1\rangle & \langle 0|L_k|0\rangle & \langle 0|L_k|-1\rangle \\ \langle -1|L_k|1\rangle & \langle -1|L_k|0\rangle & \langle -1|L_k|-1\rangle \end{pmatrix}$$

där $\langle m'|L_k|m\rangle \equiv \langle Y_{lm'}|L_k Y_{lm}\rangle$.)

2) Följande tre sönderfall kan förekomma:

$$(1) \Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$$

$$(2) \Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$$

$$(3) n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

a) Rita Feynman-diagram på kvarknivå för varje sönderfall, och ange (med motivation) om sönderfallet sker genom stark eller svag växelverkan. I det fall sönderfallet sker genom svag växelverkan, rita ut den lämpliga virtuella vektorbosonen (W^+ , W^- eller Z^0) på lämplig plats i diagrammet.

b) I reaktion (1), beräkna de kinetiska energierna hos protonen och pi-mesonen, om Λ -hyperonen är i vila före sönderfallet. Räkna icke-relativistiskt, men kommentera i efterhand om det är en bra approximation i detta fall.

c) I reaktion (3), beräkna möjliga kinetiska energier hos antineutrino, om neutronen är i vila före sönderfallet. Försumma protonens kinetiska energi, men motivera varför det kan göras.

3. a) Använd Weizsäcker's semi-empiriska massformel (vätskedroppsmodellen) för att så noggrant som möjligt härleda ett uttryck för stabilitetslinjen för kärnor med udda nukleontal A , dvs ett uttryck av formen $Z = Z(A)$, där Z är protontalet för den gentemot β -sönderfall stabila isobaren med givet A . Uttrycket skall utöver variabeln A endast innehålla siffervärden!

(Ledning: betrakta Z som en kontinuerligt varierbar storhet.)

- b) Använd det ovan härledda uttrycket till att bestämma Z för den stabila isobaren med $A = 101$. Gör en beräkning (med utgångspunkt från tabulerade bindningsenergier eller tabulerade massor) som visar om de närmast angränsande isobarerna $(Z-1, A)$ och $(Z+1, A)$ verkligen kan sönderfalla till (Z, A) genom någon form av β -sönderfall, och i så fall vilken form (EC , β^+ , eller β^-).

4. Som en ytterst förenklad modell av en meson tänker vi oss två partiklar (kvark och antikvark, vardera med massan m) vilka sammanbinds av en potential av formen $V(r) = B \cdot r$ där r är avståndet mellan partiklarna och B en positiv konstant. Systemet antas vara i ett s-tillstånd, dvs har en sfäriskt symmetrisk vågfunktion, och vi antar att vi kan räkna icke-relativistiskt.

- a) Använd variationsprincipen och en testfunktion (trial wave function) av formen $\exp(-r/a)$ för att visa att en övre gräns för grundtillståndets energi (bortsett från partiklarnas vilomassor) ges av

$$C \cdot \left(\frac{B^2 \hbar^2}{m} \right)^{\frac{1}{3}}$$

där C är en numerisk (dimensionslös) konstant av storleksordningen 10^0 ; värdet på denna konstant bör fås ur beräkningen. Beräkningen bör vara måttligt lång, men som extra hjälp ges följande integraler:

$$\int_0^{\infty} r \exp(-2r/a) dr = \frac{a^2}{4} \quad \int_0^{\infty} r^2 \exp(-2r/a) dr = \frac{a^3}{4} \quad \int_0^{\infty} r^3 \exp(-2r/a) dr = \frac{3a^4}{8}$$

- b) Ett sidoresultat av din beräkning bör vara ett värde på a , vilket kan ses som ett mått på mesonens "storlek". Vilket värde fick du på a , uttryckt i $\hbar$, m och B ?

- c) Förklara vad den ovan angivna potentialen kan tänkas ha att göra med att man ej iakttar isolerade (enstaka) kvarkar.

(Ledning: du behöver knappt lösa delproblem (a) eller (b) för att svara på fråga (c) ...)

5. Den tidsberoende störningsteorin kan lämpligen inledas med följande analys av ett enkelt, tidsberoende system:

Vi antar att ψ_a och ψ_b är normerade egentillstånd till en tidsberoende Hamiltonoperator H_0 vid tidpunkten $t = 0$, med olika egenenergier E_a och E_b . De antas bilda ett fullständigt funktionssystem (fullständig bas), så ett godtyckligt och även tidsberoende tillstånd $\Psi(t)$ kan skrivas som en superposition

$$\Psi(t) = c_a(t)\psi_a \exp(-iE_a t / \hbar) + c_b(t)\psi_b \exp(-iE_b t / \hbar)$$

Anta nu att systemet utsätts för en tidsberoende störning $H'(t)$, så att den totala Hamiltonoperatören blir $H = H_0 + H'(t)$.

a) Härled de exakta differentialekvationerna för koefficienterna $c_a(t)$ och $c_b(t)$, uttryckta i de fyra matriselementen $H'_{ij} = \langle \psi_i | H'(t) | \psi_j \rangle$, där i och j var för sig är a eller b .

b) Anta att $H'_{aa} = H'_{bb} = 0$ och att $H'_{ab} = H'_{ba} = E(t)$, där

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } t < 0 \\ \varepsilon & \text{för } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{för } t > T \end{cases}$$

Här är ε ett energivärde sådant att

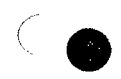
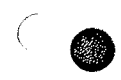
$$0 < \varepsilon < E_a - E_b$$

Störningen antas pågå endast under en kort tid T , nämligen sådan att

$$T \ll \frac{\hbar}{E_a - E_b}$$

Före störningen (dvs för $t < 0$) är sannolikheten 100% att finna systemet i tillståndet ψ_a .

Beräkna, med hjälp av lämpliga approximationer, sannolikheten för att man efter att störningen upphört (dvs för $t > T$) skall finna partikeln i tillståndet ψ_b . Svaret kan uttryckas i ε , T och $\hbar$.



1) LÖSNING =

VI HAR JU $L_z |m\rangle = \hbar m |m\rangle$ SÅ
$$\langle m' | L_z | m \rangle = \hbar m \langle m' | m \rangle = \hbar m \delta_{mm'}$$
 VILKET GER
 (ENLIGT DEN ANGIVNA MATRISUPPSTÄLLNINGEN)

$$L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

MATRISERNA FÖR L_x OCH L_y KONSTRUERAR VIA L_+ OCH L_- GENOM

$$L_+ = L_x + iL_y$$

$$L_- = L_x - iL_y$$

$$L_x = \frac{1}{2} (L_+ + L_-)$$

$$L_y = -\frac{i}{2} (L_+ - L_-)$$

DÄR VI FÅR ELEMENTEN I L_+ ENLIGT

$$\langle m' | L_+ | m \rangle = \langle \ell m' | \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)} | \ell, m+1 \rangle$$

$$= \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)} \langle m' | m+1 \rangle = \hbar \sqrt{2 - m(m+1)} \cdot \langle m' | m+1 \rangle$$

DVS

$$L_+ = \begin{pmatrix} \langle 1|L_+|1 \rangle & \langle 1|L_+|0 \rangle & \langle 1|L_+|-1 \rangle \\ \langle 0|L_+|1 \rangle & \langle 0|L_+|0 \rangle & \langle 0|L_+|-1 \rangle \\ \langle -1|L_+|1 \rangle & \langle -1|L_+|0 \rangle & \langle -1|L_+|-1 \rangle \end{pmatrix} =$$

↑
 element $\neq 0$
 om $m' = m+1$
 (inringade)

$$= \begin{pmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PÅ SAMMA SÄTT

$$\langle m' | L_- | m \rangle = \langle \ell m' | \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)} | \ell, m-1 \rangle =$$

$$= \hbar \sqrt{2 - m(m-1)} \langle m' | m-1 \rangle$$

↑
 element $\neq 0$
 om $m' = m-1$

$$\begin{aligned} \langle 0 | L_- | 1 \rangle &= \hbar\sqrt{2} \\ \rightarrow \langle -1 | L_- | 0 \rangle &= \hbar\sqrt{2} \end{aligned}$$

VARAV

$$L_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \hbar\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

SÄLDES

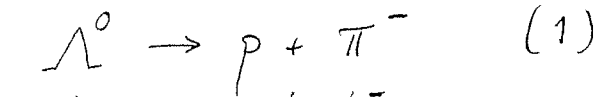
$$L_x = \frac{1}{2}L_+ + \frac{1}{2}L_- = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_y = -\frac{i}{2}(L_+ - L_-) = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ -\hbar\sqrt{2} & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & -\hbar\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

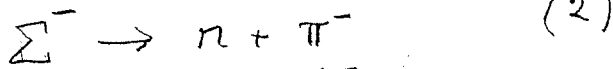
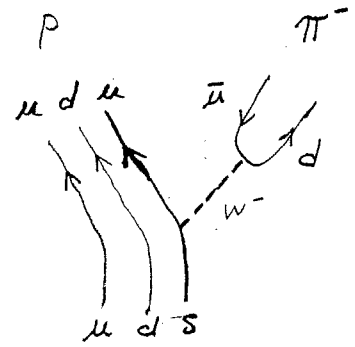
2) Lösnine

a)



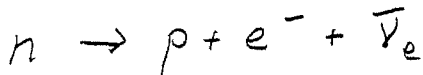
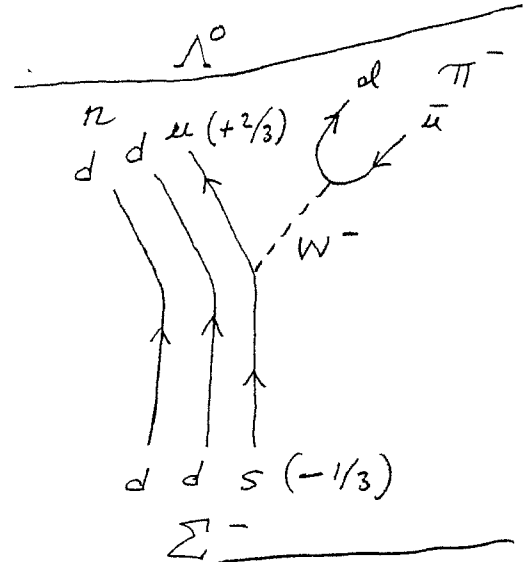
$uds \quad uud \quad d\bar{u}$

quark flavour bevaras ej $\rightarrow$ svag vxv



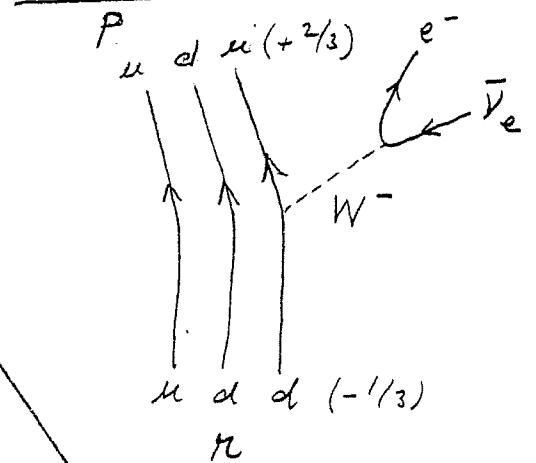
$dds \quad udd \quad d\bar{u}$

quark flavour bevaras ej $\rightarrow$ svag vxv



$udd \quad uud$

quark flavour bevaras ej $\rightarrow$ svag vxv



b) $m_{\Lambda^0} c^2 = 1115.7 \text{ MeV}$

$- m_p c^2 = 938.3 \text{ MeV}$

$- m_{\pi^-} c^2 = 139.6 \text{ MeV}$

$Q = 37.8 \text{ MeV}$

Protonen och π^- märke ha lika rörelsemängd p (åt motsatta håll). Med kinetiska energier E_p och E_π fås icke-relativistiskt

$$E_p = \frac{p^2}{2m_p}, \quad E_\pi = \frac{p^2}{2m_\pi} \rightarrow m_p E_p = m_\pi E_\pi \rightarrow E_\pi = \frac{m_p}{m_\pi} E_p \rightarrow$$

$$\rightarrow E_p + E_\pi = E_p \left(1 + \frac{m_p}{m_\pi}\right) = Q \rightarrow E_p = \frac{Q}{1 + \frac{m_p}{m_\pi}} \approx \frac{37.8}{1 + \frac{938}{140}} \approx \underline{\underline{4.9 \text{ MeV}}}$$

$$\rightarrow E_\pi = 37.8 - 4.9 = \underline{\underline{32.9 \text{ MeV}}}$$

Notera att E_π är $\frac{32.9}{139.6 + 32.9} \approx 0.19$ (19%) av totala energin hos π^- , så icke-relativistiska approximationen är tveksam.

$$c) \quad m_n c^2 = 939.566 \text{ MeV}$$

$$m_p c^2 = 938.272 \text{ MeV}$$

$$m_e c^2 \approx 0.511 \text{ MeV}$$

$$m_{\bar{\nu}_e} c^2 \approx 0 \text{ MeV}$$

$$Q \approx 0.783 \text{ MeV}$$

Antineutrinos minimala kinetiska energi är ≈ 0 (elektronen tar hela Q) och den maximala är Q (elektronens kinetiska energi ≈ 0).

$$\therefore \quad 0 \leq E_{\bar{\nu}_e} \leq 0.783 \text{ MeV}$$

Eftersom protonens massa är så mycket större än elektronens (och antineutrinos) är det en rätt bra approximation att försumma protonens kinetiska energi.

3) LÖSNING:

a)

$$M = Zm_p + (A-Z)m_n - a_1 A + a_2 A^{2/3} + a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_4 \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta$$

VID β -SÖNDERFALL ÄR A KONSTANT, VI SÖKER STABILITETSKURVAN GENOM ATT SÖKA MINIMUM AV M SOM FUNKTION AV Z VID KONSTANT A , FÖR UDDA A ÄR $\delta = 0$.

$$\frac{dM}{dZ} = m_p - m_n + a_3 \frac{2Z}{A^{1/3}} + a_4 \frac{2 \cdot (A-2Z) \cdot (-2)}{A} =$$

$$= m_p - m_n + \frac{2a_3}{A^{1/3}} Z - \frac{4a_4}{A} (A-2Z) =$$

$$= (m_p - m_n - 4a_4) + \left(\frac{2a_3}{A^{1/3}} + \frac{8a_4}{A} \right) Z = 0$$

$$\rightarrow Z = \frac{4a_4 + m_n - m_p}{\frac{2a_3}{A^{1/3}} + \frac{8a_4}{A}} = \quad (\text{INSÄTTA VÄRDEN I ENHETEN μ)}$$

$$= \frac{4 \cdot 0.02544 + 1.00866 - 1.00728}{\frac{2 \cdot 0.0007626}{A^{1/3}} + \frac{8 \cdot 0.02544}{A}} = \frac{0.10314}{\frac{0.0015252}{A^{1/3}} + \frac{0.20352}{A}}$$

$$= \frac{67.62 A}{A^{2/3} + 133.44}$$

b) FÖR $A=101$ GER OVRÄNST. FORMEL $Z = 44.02 \approx 44$,
DVS $^{101}_{44}\text{Ru}$. ISOBAREN MED $Z-1$ ÄR $^{101}_{43}\text{Tc}$ OCH
DEN MED $Z+1$ ÄR $^{101}_{45}\text{Rh}$, BINDNINGSENERGIERNA ÄR
ENLIGT PHYSICS HANDBOOK

$^{101}_{43}\text{Tc}$	867.89 MeV
$^{101}_{44}\text{Ru}$	868.74 MeV
$^{101}_{45}\text{Rh}$	867.40 MeV

SÖNDERFALL TILL ^{101}Ru :
 β^- ?
—
 β^+ eller EC ?

The figure consists of two separate line graphs. The left graph plots 'Rate of reaction' on the y-axis against 'Temperature (°C)' on the x-axis. The curve starts at a low rate at 10°C, rises to a peak at 30°C, and then declines at 40°C. The right graph also plots 'Rate of reaction' on the y-axis against 'Temperature (°C)' on the x-axis. This curve shows a steep, exponential increase in the rate of reaction as temperature rises from 10°C to 30°C, and then the rate levels off or plateaus at 40°C.

(B1 = BINDINGSNGROCI MODERKARUW
B2 = " DGTTERKARUW)

•

11

C

)

4) LÖSNING: VARIATIONSPRINCIPEN SÄGEL ATT

$$E_g \leq \langle \Psi | H | \Psi \rangle$$

MED SFÄRISKA KOORDINATER OCH MED SYSTEMET
I S-TILLSTÄND (DÅ ÄR SFÄRISKT SYMMETRISKT,
 $\Psi = \Psi(r)$) FÅS (SE PHYSICS HANDBOOK; $L^2 \Psi = 0$)

$$H\Psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \cdot \Psi(r) + V(r) \Psi(r)$$

DÄR $\mu = m/2$ ÄR REDUCERAD MASSAN,

NORMALISERING AV $\Psi =$

$$1 = \int_0^\infty |\Psi|^2 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^\infty e^{-\frac{r}{a/2}} r^2 dr$$
$$= 4\pi \cdot \frac{a^3}{4} = \pi a^3$$

SÅ Ψ NORMALISERAD ÄR

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$$

VIDARE

$$H\Psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r e^{-r/a}) + B \cdot r \cdot e^{-r/a} \right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{-r/a} - \frac{r}{a} e^{-r/a} \right) + B \cdot r e^{-r/a} \right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{a} e^{-r/a} - \frac{1}{a} e^{-r/a} + \frac{r}{a^2} e^{-r/a} \right) + B \cdot r e^{-r/a} \right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \cdot \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{2}{ra} - \frac{1}{a^2} \right) + B \cdot r \right] e^{-r/a}$$

VARAV

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | H | \Psi \rangle &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi} a^3} e^{-r/a} \frac{1}{\sqrt{\pi} a^3} \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{2}{ra} - \frac{1}{a^2} \right) + B r \right] e^{-r/a} 4\pi r^2 dr \\
&= \frac{4\pi}{\pi a^3} \int_0^{\infty} e^{-2r/a} \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \cdot \left(\frac{2r}{a} - \frac{r^2}{a^2} \right) + B r^3 \right] dr \\
&= \frac{4}{a^3} \cdot \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \cdot \frac{2}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{a}} r dr - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{a}} r^2 dr + B \int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{a}} r^3 dr \right] = \\
&= \frac{4}{a^3} \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2}{4} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{a^2} \frac{a^3}{4} + B \frac{3a^4}{8} \right] = \\
&= \frac{4}{a^3} \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{a}{4} + B \frac{3a^4}{8} \right] = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{a^2} + \frac{3 \cdot B \cdot a}{2} \quad \text{DERIVERING:}
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{da} \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{a^2} + \frac{3Ba}{2} \right] = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{2}{a^3} + \frac{3B}{2} = 0 \quad (\text{MINIMERING})$$

$$\text{VARAV} \quad \frac{3B}{2} = \frac{\hbar^2}{\mu a^3} \rightarrow a^3 = \frac{2}{3} \frac{\hbar^2}{\mu B} \rightarrow a = \left(\frac{2}{3} \frac{\hbar^2}{\mu B} \right)^{1/3}$$

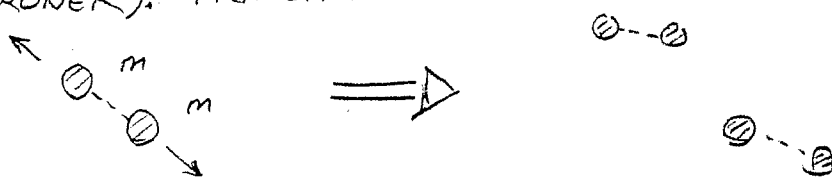
VARVID ENLIGT OVAN

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | H | \Psi \rangle &= \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{3\mu B}{2\hbar^2} \right)^{2/3} + \frac{3B}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \frac{\hbar^2}{\mu B} \right)^{1/3} = \\
&= \left(\frac{3}{2} \right)^{5/3} \cdot 2^{1/3} \cdot \left(\frac{B^2 \hbar^2}{m} \right)^{1/3} \approx 2.48 \cdot \left(\frac{B^2 \hbar^2}{m} \right)^{1/3}
\end{aligned}$$

b) MESONENS "STORLEK" BLIR UNG.

$$a = \left(\frac{4}{3} \frac{\hbar^2}{mB} \right)^{1/3} \approx 1.1 \left(\frac{\hbar^2}{mB} \right)^{1/3}$$

c) ENERGIN ÖKAR OBEGRÄNSAT, OM AVSTÅNDET ($\sim a$) MELLAN KVARKARNA ÖKAS; GÅR TIL BILDANDE AV NYA PARTIKLAR (HADRONER). PRINCIP:



5) LÖSNING:

a) TIDSBÄRANDE SCHRÖDINGER.EKVATIONEN

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

BLIR

$$(H_0 + H') [c_a(t) e^{-iE_a t/\hbar} \psi_a + c_b(t) e^{-iE_b t/\hbar} \psi_b]$$

$$= i\hbar \left[\dot{c}_a(t) e^{-iE_a t/\hbar} \psi_a - c_a(t) \cdot \frac{iE_a}{\hbar} e^{-iE_a t/\hbar} \psi_a + \right. \\ \left. \dot{c}_b(t) e^{-iE_b t/\hbar} \psi_b - c_b(t) \frac{iE_b}{\hbar} e^{-iE_b t/\hbar} \psi_b \right]$$

MEN

$$H_0 \psi_a = E_a \psi_a$$

$$H_0 \psi_b = E_b \psi_b$$

VARAV FÖLJER ATT

$$c_a(t) e^{-iE_a t/\hbar} H' \psi_a + c_b(t) e^{-iE_b t/\hbar} H' \psi_b =$$

$$= i\hbar \dot{c}_a(t) e^{-iE_a t/\hbar} \psi_a + i\hbar \dot{c}_b(t) e^{-iE_b t/\hbar} \psi_b$$

VARAV (GENOM SKALÄRMULTIPLIKATION)

$$c_a(t) \cdot e^{-iE_a t/\hbar} \langle \psi_a | H' | \psi_a \rangle + c_b(t) e^{-iE_b t/\hbar} \langle \psi_a | H' | \psi_b \rangle$$

$$= i\hbar \dot{c}_a(t) e^{-iE_a t/\hbar}$$

$$c_a(t) \cdot e^{-iE_a t/\hbar} \langle \psi_b | H' | \psi_a \rangle + c_b(t) e^{-iE_b t/\hbar} \langle \psi_b | H' | \psi_b \rangle =$$

$$= i\hbar \dot{c}_b(t) e^{-iE_b t/\hbar}$$

$$\text{VARAV} \begin{cases} \dot{c}_a(t) = -\frac{i}{\hbar} [H'_{aa} \cdot c_a(t) + H'_{ab} \cdot e^{i(E_a - E_b)t/\hbar} \cdot c_b(t)] \\ \dot{c}_b(t) = -\frac{i}{\hbar} [H'_{bb} \cdot c_b(t) + H'_{ba} \cdot e^{-i(E_a - E_b)t/\hbar} c_a(t)] \end{cases}$$

(EXAKTA EKVATIONER)

b) MED $H'_{aa} = H'_{bb} = 0$ OCH $H'_{ab} = H'_{ba} = E(t)$ FÅS

$$\begin{cases} \dot{C}_a(t) = -\frac{i}{\hbar} E(t) \cdot e^{i(E_a - E_b)t/\hbar} C_b(t) \\ \dot{C}_b(t) = -\frac{i}{\hbar} E(t) e^{-i(E_a - E_b)t/\hbar} C_a(t) \end{cases}$$

VID $t=0$ HAR VI

$$\Psi = C_a(0) \cdot \Psi_a + C_b(0) \cdot \Psi_b$$

OM SANNOLIKHETEN ÄR 100 % ATT FINNA SYSTEMET I Ψ_a
PÅ NÄSTE VI HAR $C_a(0) = 1$, $C_b(0) = 0$, FÖR TIDER
 $t \ll \frac{\hbar}{E_a - E_b}$ FÅS

$$e^{i(E_a - E_b)t/\hbar} \approx 1$$

UNDER TIDEN $0 < t < T$ HAR VI ALLTSÅ

$$\dot{C}_a(t) \approx -\frac{i}{\hbar} E \cdot C_b(t) \approx 0 \quad (C_b(t) \approx 0)$$

$$\dot{C}_b(t) \approx -\frac{i}{\hbar} E \cdot C_a(t) \approx -\frac{i}{\hbar} E \quad (C_a(t) \approx 1)$$

FÖR $t > T$ HAR VI $E(t) = 0$ OCH ALLSÅ $\dot{C}_a = \dot{C}_b = 0$.
VID TIDEN T FÅS

$$C_b(T) \approx -\frac{i}{\hbar} E \cdot T$$

OCH SANNOLIKHETEN ATT FINNA PARTIKELN I Ψ_b BLIR FÖR
 $t > T$

$$|C_b(T)|^2 \approx \left(\frac{E \cdot T}{\hbar} \right)^2$$